

Índice General

1	INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA	3
1.1	¿Qué es la Física?	3
1.2	División histórica de la Física	3
1.3	La estructura conceptual de la Física	6
1.4	La estructura lógico-matemática de las teorías físicas	8
1.5	Toda la Física Clásica	9
1.6	La imagen clásica del universo	11
1.7	Las partes de la Física Clásica	12
2	CINEMÁTICA DEL PUNTO	17
2.1	Sistemas de referencia	17
2.2	Velocidad	21
2.3	Aceleración	23
2.4	Componentes tangencial y normal de la aceleración	24
2.5	Movimiento relativo	28
3	PRINCIPIOS DE LA DINÁMICA CLÁSICA	31
3.1	Introducción	31
3.2	Fuerza	32
3.2.1	Concepto de fuerza	32
3.3	La interacción gravitacional	32
3.4	Concepto de masa inercial	33
3.5	Leyes de la dinámica clásica vectorial	33
3.5.1	Primer postulado (Segunda ley de Newton)	33
3.5.2	Segundo postulado (Principio de acción y reacción o tercera ley de Newton)	34
3.6	Sistemas no inerciales. Fuerzas de inercia	35
4	TEOREMAS GENERALES DE LA DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL	37
4.1	Introducción	37
4.2	Teorema de la cantidad de movimiento	38
4.2.1	Cantidad de movimiento	38

4.2.2	Impulso de una fuerza	38
4.2.3	Teorema	39
4.3	Teorema del Momento cinético	40
4.3.1	Momento cinético respecto a un punto	40
4.3.2	Teorema	40
4.4	Teorema de la energía cinética	41
4.4.1	Energía cinética	42
4.4.2	Trabajo	42
4.4.3	Teorema	43
4.4.4	Fuerzas conservativas	43
4.4.5	Movimiento bajo fuerzas conservativas	45
5	SISTEMAS DE PARTÍCULAS	47
5.1	Introducción	47
5.2	Teorema de la cantidad de movimiento	47
5.2.1	Cantidad de movimiento de un sistema	48
5.2.2	Teorema	48
5.3	Teoremas del centro de masas	49
5.3.1	Masa del sistema	49
5.3.2	Centro de masas	49
5.3.3	Teorema 1	49
5.3.4	Teorema 2 (Teorema del centro de masas)	50
5.3.5	Corolarios	50
5.4	Teorema del Momento cinético	51
5.4.1	Momento cinético respecto a un punto	51
5.4.2	Teorema	51
5.5	Teorema de la energía	53
5.5.1	Energía cinética de un sistema	53
5.5.2	Trabajo sobre un sistema de partículas	53
5.5.3	Teorema de la energía	54
5.5.4	Conservación de la energía en un sistema	54
5.6	Cuestiones y problemas de Mecánica	56
6	OSCILACIONES MECÁNICAS	69
6.1	Introducción	69
6.2	Movimiento periódico	70
6.3	Movimiento armónico simple	70
6.3.1	Definiciones	70
6.3.2	Otras formas de expresar el M.A.S.	71
6.3.3	Velocidad	72
6.3.4	Aceleración	73
6.3.5	Representación gráfica de $x(t)$, $v_x(t)$ y $a_x(t)$	73
6.4	Dinámica del M.A.S. libre	75

6.4.1	Energía potencial	77
6.5	El oscilador libre amortiguado	79
6.5.1	Movimiento subamortiguado	81
6.6	El oscilador forzado	83
6.6.1	El oscilador forzado amortiguado	86
6.7	Problemas	89
7	ONDAS	95
7.1	Introducción	95
7.2	Las ondas viajeras	96
7.2.1	Ondas transversales y longitudinales	98
7.3	La ecuación de ondas	100
7.3.1	Principio de superposición	102
7.4	Ondas periódicas	103
7.4.1	Ondas armónicas	104
7.5	Ondas en tres dimensiones	107
7.5.1	Ondas planas	107
7.5.2	Ondas armónicas planas	108
7.5.3	La ecuación general de ondas	109
7.5.4	Ondas esféricas	110
7.6	El efecto Doppler	112
7.6.1	Ondas de Mach o de choque	116
7.7	Superposición de ondas	117
7.7.1	Superposición de ondas armónicas	118
7.8	Problemas	125
8	CAMPO ELECTROSTÁTICO	133
8.1	Introducción al Electromagnetismo	133
8.2	Leyes de la Electrostatica	134
8.3	Campo creado por una distribución de cargas estacionarias	135
8.3.1	Líneas de campo	136
8.4	Potencial Electrostatico	137
8.4.1	Potencial creado por una distribución de cargas	139
8.5	Fuerza electrostatica	140
8.6	Ley de Coulomb	141
8.7	Cuestiones y Problemas	143
9	CAMPO MAGNETOSTÁTICO	147
9.1	Corriente eléctrica	147
9.2	Leyes de la Magnetostática	147
9.3	Ley de Biot-Savart	148
9.3.1	Campo creado por un hilo rectilíneo infinito	149
9.4	Fuerza magnética	150

9.4.1	Fuerza entre dos hilos de corriente	152
9.5	Cuestiones y problemas	154
10	RELATIVIDAD EN LA FÍSICA CLÁSICA	157
10.1	Transformaciones de Galileo y Mecánica	157
10.2	Relatividad Galileana y Electromagnetismo	159
10.3	El experimento de Michelson-Morley	160
11	EL ESPACIO Y TIEMPO DE LA RELATIVIDAD	165
11.1	Los postulados de la Relatividad	165
11.2	Medición del tiempo	167
11.3	La Relatividad del tiempo. Dilatación del tiempo	168
11.3.1	Evidencia experimental de la dilatación del tiempo	173
11.4	Contracción de la longitud	176
11.4.1	Evidencia experimental de la contracción de la longitud	177
11.4.2	Longitudes perpendiculares al movimiento relativo	179
11.5	La Transformación de Lorentz	180
11.6	Aplicaciones de la transformación de Lorentz	183
11.7	La fórmula de adición de la velocidades	187
11.8	Cuestiones y problemas	191
12	LA FÍSICA CUÁNTICA	193
12.1	Introducción	193
12.2	Los fundamentos	195
12.3	Espacios vectoriales	200
12.4	Lo que pasa entre medida y medida	202
12.5	Ortogonalidad y ortonormalidad	203
12.6	Valor medio de una variable dinámica	205
12.7	El operador posición es bastante peculiar	206
13	APLICACIONES ACADÉMICAS	209
13.1	Relación entre la fuerza y la energía	209
13.2	Ejemplos de autovalores y autofunciones de la energía	211
13.2.1	Pozo cuadrado infinito de anchura L	212
13.2.2	Oscilador armónico simple	214
13.3	El principio de incertidumbre	215
13.4	El efecto túnel	218
13.5	Problemas	220

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA

1.1 ¿Qué es la Física?

Antes de responder esta pregunta vamos a poner un ejemplo que motivará en parte la respuesta. Imaginemos que asistimos a un partido de fútbol y pensemos por un momento en la enorme cantidad de diferentes fenómenos que presenciamos: los jugadores pasándose la pelota y chutando, el movimiento posterior del balón, el silbato del árbitro y el sonido que produce, los espectadores, algunos sentados y otros de pie, haciendo diferentes movimientos y provocando diferentes sonidos, los comentaristas que escuchamos si tenemos nuestro receptor de radio encendido, la luz que emiten los focos del estadio, etcétera. Podemos decir, sin exagerar, que la cantidad de fenómenos de diferente naturaleza que se producen en cualquier situación cotidiana es casi infinita. Pues bien, *la Física tiene por objeto analizar al máximo los fenómenos que se producen en la naturaleza así como los componentes básicos de la misma, y gestar unas leyes que permitan comprender y predecir su comportamiento.* Todo ello a través de la observación, la experimentación y el razonamiento que es lo que se conoce como método científico. La definición anterior de la Física es una definición de andar por casa, es decir, para que todos nos entendamos desde un principio y poder continuar con la exposición, porque si nos detuviésemos por un momento y analizásemos detenidamente cada uno de los términos de la misma, tal como: ¿Qué es predecir? ¿Qué es observar? ¿Qué es la naturaleza? Llegaríamos con certeza a una serie de inconsistencias lógicas que han sido estudiadas con profundidad por filósofos, físicos, historiadores, etcétera. Como no tenemos tiempo para profundizar en estas importantes materias nos contentaremos con esa idea más o menos elaborada que todos tenemos sobre lo que es la Física.

1.2 División histórica de la Física

Desde un punto de vista histórico podemos establecer dos grandes etapas en el desarrollo de la Física. La primera de ellas es mucho más extensa que la segunda:

se trata del periodo que va desde la Antigua Grecia (o incluso antes) hasta finales del siglo XIX, y recibe el nombre de Física Clásica. La segunda, es la Física que se ha desarrollado en el siglo XX, y recibe el nombre de Física Moderna.

En términos estrictamente cronológicos (y, por tanto, históricos) la división anterior es correcta, pero además, como veremos en la sección siguiente, existen razones de índole conceptual que la justifican. Pero al margen de esto último, el análisis histórico de la Física (o de cualquier otra disciplina) es importante para la adecuada comprensión de la misma. Porque la Física no ha sido siempre igual. Ha evolucionado en el tiempo; ha progresado. Pero ¿cómo ha progresado? La idea intuitiva de progreso por acumulación de conocimiento falla, y el estudio del modo adecuado de progreso constituye toda una nueva disciplina: La Filosofía de la Física (con mayor generalidad, de la Ciencia). Simplificando mucho podemos decir que la ciencia progresa por aproximaciones sucesivas: cada nueva teoría mejora a la anterior en su ámbito, y lo amplía.

Dado que no tenemos mucho tiempo para adentrarnos en estos temas, pues ello nos llevaría muchas clases, nos limitaremos a esbozar brevemente en qué consisten la Física Clásica y la Física Moderna¹. A finales del siglo XIX se pensaba que se tenía un conocimiento completo del universo a través de las tres grandes teorías de la Física Clásica: la Mecánica Clásica de Newton, de la cual nos ocuparemos en las siguientes clases, la Teoría Clásica de la Gravitación, también de Newton, y el Electromagnetismo de Maxwell. En realidad, sintetizar todos los avances de la Física por aquel entonces en los nombres de estos dos grandes científicos puede resultar un poco desconcertante. Intervinieron muchos otros científicos, aportando cada uno su granito de arena. Sin embargo, Newton y Maxwell fueron capaces de sintetizar, el primero, todo el conocimiento adquirido a lo largo de los siglos en el estudio del movimiento de los cuerpos, tanto en la Tierra como en el resto del universo conocido hasta entonces, y el segundo, todo el conocimiento relativo a los fenómenos electromagnéticos, en unas cuantas leyes en las que todo este conocimiento se resumía; leyes que permitían predecir todos estos fenómenos y muchos más. Por tanto, figuras tan importantes como Galileo, Kepler, Copérnico, Pascal, Faraday, Coulomb, etcétera, fueron relevantes para la gestación de estas teorías aunque no representasen el último eslabón de las mismas. Sus observaciones, sus leyes fenomenológicas, etcétera, fueron la base para la gestación de leyes más fundamentales a partir de las cuales podían deducirse. A finales del siglo XIX, Electromagnetismo, Gravitación, y Mecánica Newtoniana, parecían ser la base de todo el conocimiento científico adquirido hasta el momento, y del desarrollo tecnológico por aquel entonces. Hemos de comentar que, en el desarrollo de la Física, el conocimiento se fue parcelando en

¹A quienes estén interesados en el estudio de la evolución de la ciencia (casi exclusivamente de la Física) a través de la historia les recomiendo la lectura de “Introducción histórica a la filosofía de la ciencia”, de John Losee (Alianza Editorial); pero les advierto que no es una lectura fácil. Bastante más ameno, y también dirigido al análisis filosófico del conocimiento científico, pero no desde una perspectiva histórica, es el libro de Alan Chalmers: “¿Qué es esa cosa llamada ciencia?” (Editorial siglo XXI).

un principio en diferentes partes, como la Acústica, la Electricidad, el Magnetismo, la Termodinámica, la Óptica, etcétera, y que con el paso del tiempo se vio que eran teorías que podían deducirse de las dos teorías anteriores. Por ejemplo, la luz es una onda electromagnética y por tanto todo lo que se refiere a la generación y propagación de la misma se puede explicar a partir de las cuatro ecuaciones de Maxwell. Las ondas sonoras, de cuyo estudio se ocupa la Acústica, son un fenómeno puramente mecánico para cuyo estudio se usa una teoría que sintetiza el comportamiento de los sistemas de un número ingente de partículas (del orden del número de Avogadro), y que es la Termodinámica.

Parecía que la Física había llegado a su fin y que todo podía explicarse a través de estas teorías. Sin embargo, una serie de resultados experimentales novedosos en aquella época, los cuales no podían explicarse con la Física Clásica, unido a algunas inconsistencias de la Física Clásica, dio lugar a una revolución en la Física que se representó en la gestación de las dos teorías que constituyen la Física Moderna: nos referimos a la Relatividad y a la Mecánica Cuántica. La Relatividad, tanto Especial como la General, se debe a Albert Einstein, y la Mecánica Cuántica a varios científicos como Heisenberg, De Broglie, Schrödinger, etcétera.

Señalaremos brevemente dos de los fenómenos contradictorios con la Física Clásica, y que guardan relación con la Física del microcosmos. Dado el poder de la Mecánica Clásica y el Electromagnetismo para explicar los fenómenos más cercanos a nuestros sentidos, se llegó a pensar que el comportamiento del mundo atómico y subatómico estaba regido por las mismas leyes, sin más que aplicar las mismas al movimiento de los electrones en torno al núcleo, formado por protones y neutrones. Sin embargo, había dos resultados experimentales que estas teorías no eran capaces de explicar. Nos referimos al fenómeno de la cuantización de la energía, y el de la estabilidad de los átomos. Desde un punto de vista clásico, si pensamos en un átomo de hidrógeno, el cual contiene un único electrón, la energía del mismo, suma de las energías cinética y potencial, puede tomar en principio cualquier valor, dependiendo de las condiciones iniciales del movimiento. Pero el Electromagnetismo nos dice que una partícula cargada que se mueve aceleradamente (tal y como ocurre con el electrón clásico moviéndose en órbitas elípticas) irradia continuamente energía, es decir emite energía, y por tanto, al ir perdiendo esta energía (de forma continua) no describiría una elipse, sino una espiral, y acabaría colapsando sobre el núcleo². Es decir, con la Física del siglo XIX ¡la materia es inestable! Y por tanto no podríamos existir nosotros, puesto que estamos compuestos por átomos. Otro resultado experimental, previo a la Relatividad Especial de Einstein, pero que no fue precisamente lo que motivó la gestación de esta teoría por el que es considerado el Físico más importante de todos los tiempos, es que la velocidad de la luz es una constante independiente del sistema de referencia que la mide, lo que contradice a la Mecánica Clásica.

He puesto estos ejemplos con el objeto de mostrar la relevancia de la Física Moderna, y la importancia de dar unas breves nociones de la misma en cualquier

²En el caso del electrón de un átomo de Hidrógeno, un simple cálculo muestra que el impacto con el núcleo se produciría ¡en menos de 10^{-10} segundos!

curso de Física General.

1.3 La estructura conceptual de la Física

Este bosquejo histórico puede resumirse en la siguiente tabla:

FÍSICA CLÁSICA	FÍSICA MODERNA
Mecánica newtoniana (Newton, 1660)	Relatividad (Einstein, 1905)
Termodinámica, Acústica, etc. (siglos XVIII y XIX)	Mecánica Cuántica (1926)
Electromagnetismo (Maxwell, 1860)	

Ahora bien, desde un punto de vista conceptual esta tabla no clarifica la estructura básica de la Física. En cambio, esta estructura se clarifica si se piensa que la Física sólo tiene dos partes: La mecánica y las leyes de fuerza o teorías de interacción.

El objeto de la mecánica es la investigación del comportamiento de las cosas en función de las fuerzas que actúan sobre ellas.

El objeto de las leyes de fuerza es dar el valor de las fuerzas con que interaccionan las cosas en cada situación concreta.

De acuerdo con lo anterior, en nuestra tabla la Mecánica newtoniana, la Relatividad einsteniana y la Mecánica Cuántica son mecánicas³; mientras que el Electromagnetismo es una teoría de interacción. ¿Y qué pasa con la Termodinámica, la Acústica, etc.? ¿Son mecánicas o teorías de interacción? Tratemos de explicarlo. Cuando, equipados con la mecánica y las teorías de interacción, tratamos de resolver un problema concreto y realista, quedamos abrumados por la fantástica complejidad matemática del mismo. Nos vemos obligados a simplificarlo, inventando con ello un nuevo problema. Hemos creado un **modelo** de nuestro problema original.

La Termodinámica, Acústica, Óptica, etc., tratan ámbitos de problemas (usando la mecánica y las teorías de interacción) que comparten ciertas características o propiedades que permiten simplificar el problema original, transformándolo en un modelo más asequible. Más adelante, en este capítulo, diremos algo sobre cada una de estas disciplinas, con objeto de aclarar su contenido, pues lo dicho ahora es demasiado abstracto.

Volvamos a nuestra tabla: Mecánica Clásica, Relatividad y Mecánica Cuántica son tres clases de mecánica que sirven para estudiar los mismos tipos de fenómenos físicos. Sin embargo, las respuestas que dan a una misma pregunta pueden ser muy diferentes. Como todas las respuestas no podrán ser correctas a la vez, será necesario saber cuál es la correcta. Resulta que cada cual tiene su ámbito de aplicación, como se recoge en el siguiente diagrama.

³Siendo más precisos, al genio de Newton le debemos dos cosas: Sus tres leyes (Inercia, $\vec{F} = m\vec{a}$, y principio de acción y reacción) y la teoría de la gravitación. De acuerdo con nuestra clasificación conceptual, las tres leyes de Newton constituyen una mecánica, mientras que su teoría de la gravitación es una teoría de interacción.

	Bajas velocidades	Altas velocidades
Sistemas Macroscópicos	Física Clásica (1850)	Física Relativista (1900)
Sistemas Microscópicos	Física Cuántica (1930)	Física Cuántica Relativista(1950)

En el mundo al alcance de nuestros sentidos la Mecánica Clásica manda, al ser más simple e intuitiva (aunque los resultados de las otras mecánicas son prácticamente los mismos). Pero para objetos que viajan muy rápido (a velocidades comparables a la velocidad c de la luz) las reglas clásicas son modificadas por la Relatividad Especial. Cuando el tamaño del objeto de nuestro estudio es muy pequeño (digamos que del tamaño de un átomo o menor) la Mecánica Clásica se ve superada por la Cuántica. Finalmente, cuando las cosas son pequeñas y rápidas, debemos estudiarlas con la Teoría Cuántica Relativista.

Examinemos ahora las teorías de interacción. ¿Cuántos tipos de fuerza (con sus correspondientes teorías) existen? La Física dice que cuatro, cuyo listado, en orden de intensidad decreciente, es este:

- Fuerza fuerte
- Fuerza electromagnética
- Fuerza débil
- Fuerza gravitatoria

La brevedad de esta lista debiera sorprender e impresionar. ¿Dónde está la fuerza de rozamiento? ¿Y la fuerza del sillón que me mantiene ahora sentado impidiendo que la Tierra me trague? ¿Y las fuerzas que mantienen los enlaces moleculares, o la que impulsa a la pelota de tenis cuando la golpeo con la raqueta, etc.? Acontece que todas estas fuerzas son electromagnéticas, de modo que no exageramos lo más mínimo diciendo que vivimos en un mundo electromagnético. Con la excepción de la gravedad, todas las fuerzas que experimentamos en nuestra vida cotidiana son de origen electromagnético.

La fuerza fuerte, encargada de mantener unidos a protones y neutrones en el núcleo de los átomos, es de un alcance extremadamente corto (del orden del tamaño del núcleo), lo cual justifica que no la sintamos aún cuando es unas cien veces más intensa que la electromagnética.

La fuerza débil es responsable de ciertas clases de desintegración radiactiva y, además de ser de corto alcance, es unas mil veces más débil que la electromagnética.

En cuanto a la fuerza gravitatoria, es la más débil de todas ($\approx 10^{-36}$ la electromagnética), y si la percibimos es por el efecto acumulativo de cantidades ingentes de materia.

Las fuerzas electromagnéticas no sólo son las predominantes en nuestra vida diaria, sino que son las únicas bien comprendidas y experimentalmente contrastadas en todas las versiones de la mecánica (clásica, relativista y cuántica). No se puede decir lo mismo de las otras. Por ejemplo, existe una buena teoría clásica de la gravitación (la de Newton) y una relativista (la Relatividad General de Einstein), pero no existe una teoría cuántica satisfactoria de la gravitación, aún cuando hay una pléyade de físicos tratando de construirla. Actualmente existe una exitosamente

contrastada aunque compleja teoría de las interacciones débiles, y una candidata (Cromodinámica Cuántica) para explicar las fuertes que tiene buena pinta, aunque está pendiente de una mayor contrastación experimental.

1.4 La estructura lógico-matemática de las teorías físicas

Todas las teorías de la Física, ya sean mecánicas o teorías de interacción, están estructuradas de la misma forma desde un punto de vista lógico. Durante el curso de esta explicación pondremos el ejemplo de la Mecánica clásica para aclarar bien las ideas. Toda teoría se basa en unas leyes, que también reciben el nombre de *postulados, principios o axiomas*. Estas leyes relacionan distintos conceptos básicos de la teoría, que reciben el nombre de *conceptos primitivos*. De las leyes se pueden deducir resultados que se denominan *teoremas*, los cuales son estériles desde un punto de vista lógico, pero son de gran importancia en la resolución de muchos problemas. Estos teoremas suelen estar expresados a partir de *conceptos definidos* a partir de los conceptos primitivos, los cuales son también estériles desde un punto de vista lógico.

Por ejemplo, en el caso de la Mecánica Clásica los conceptos básicos son el espacio (se considera que los cuerpos se mueven en un escenario que recibe el nombre de espacio absoluto, y que tiene la estructura de un espacio euclídeo tridimensional), el tiempo (se considera también la existencia de un tiempo absoluto que transcurre de forma independiente de los sistemas de referencia), la fuerza, y la masa, también llamada masa inercial o masa inerte. Las leyes de la Mecánica Clásica han sido históricamente tres, aunque ya veremos en el tema siguiente que una de ellas puede deducirse de las otras. Estas leyes son: la ley de inercia (toda partícula aislada mantiene su estado de movimiento uniforme respecto al espacio absoluto), la segunda ley de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$), y el principio de acción y reacción o tercera ley de Newton (la fuerza que una partícula a ejerce sobre otra b es igual en magnitud y de sentido contrario a la que b ejerce sobre a , y estas fuerzas están dirigidas según la línea que une ambas partículas). Con estos principios se sintetiza todo el conocimiento relativo a los movimientos mecánicos de cuerpos macroscópicos. Nótese la simplicidad de la Física, la cantidad de conocimiento encerrado en unos pocos principios, y la complejidad de los problemas que se pueden resolver aplicándolos. Usando la segunda ley de Newton se puede deducir el teorema de la energía ($\Delta E = W$), donde E es la energía cinética ($mv^2/2$) y W el trabajo. Estos conceptos se definen a partir de los conceptos básicos de espacio, tiempo, masa y fuerza. De la misma forma, los teoremas de la cantidad de movimiento, del momento cinético, del centro de masas, se deducen a partir de los principios anteriores y se expresan a partir de conceptos derivados.

Desde un punto de vista matemático, las leyes se expresan normalmente en forma de ecuaciones diferenciales, que son ecuaciones que ligan los conceptos primitivos y

las derivadas de los mismos. Por ejemplo la aceleración, que aparece en la segunda ley de Newton, es la derivada segunda del vector de posición respecto al tiempo. La fuerza es en general una función que depende de la posición, la velocidad y el tiempo, de manera que la expresión matemática de la segunda ley de Newton es, en general, una relación entre masa, tiempo, posición, velocidad y aceleración. Para resolver el problema fundamental de la Mecánica Clásica, que es obtener el movimiento, es decir, la posición en función del tiempo, hay que integrar la ecuación diferencial. Ni que decir tiene que no nos vamos a ocupar en este curso de resolver muchas ecuaciones diferenciales, porque por un lado esto no es un curso de matemáticas sino de física, y por otro lado la resolución de ecuaciones diferenciales es un problema de gran complejidad y que constituye toda una parte de las matemáticas. Sin embargo, asentemos aquí algunos conceptos básicos. El alumno sabe que cada vez que se hace una integral indefinida aparece una constante de integración. En el caso de la segunda ley de Newton, aparecen dos constantes (dado que al aparecer una derivada segunda hay que hacer dos integrales), y éstas guardan relación con lo que se denominan condiciones iniciales, es decir, la posición y velocidad de la partícula en un instante dado.

Para aclarar esto pongamos un ejemplo. Estudiemos el movimiento de un trozo de tiza que lanzamos al aire. Supongamos que despreciamos el efecto del aire tomamos en consideración solamente la gravedad. Aplicado la segunda ley de Newton vemos que la aceleración es igual a \vec{g} , la aceleración de la gravedad, la cual es constante cuando nos movemos cerca de la superficie de la Tierra. ¿Cómo se mueve la tiza sometida a una aceleración constante \vec{g} ? Todos sabemos que se puede mover de muchas maneras: en línea recta hacia abajo, hacia arriba primero y hacia abajo después, siguiendo una parábola, otra parábola distinta, etcétera. Es decir, para saber exactamente dónde se encontrará el objeto en cada instante de tiempo hay que saber qué posición y qué velocidad tenía inicialmente el objeto. En todos los casos anteriores la ecuación diferencial es la misma ($\vec{a} = \vec{g}$), pero las condiciones iniciales cambian. Veremos esto con más detenimiento a lo largo del curso.

1.5 Toda la Física Clásica

Estamos ahora en disposición de escribir las ecuaciones **fundamentales** que representan las leyes de la Física Clásica. Cualquier otra ecuación estará siempre contenida en éstas; se deducirá de estas y de algunas hipótesis adicionales que permitan simplificar el problema, y cuyo ámbito de validez será menor que el de las ecuaciones **fundamentales**. Las leyes son las siguientes:

Bloque I:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}; \quad (\text{ley de Gauss para el campo eléctrico}) \quad (1.1)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0; \quad (\text{ley de Gauss para el campo magnético}) \quad (1.2)$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}; \quad (\text{ley de Faraday}) \quad (1.3)$$

$$\oint_L \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S (\epsilon_0 \vec{E}) \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}; \quad (\text{ley de Ampère-Maxwell}) \quad (1.4)$$

$$\oint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{k} q_g; \quad (\text{ley de Gauss para el campo gravitatorio}) \quad (1.5)$$

Bloque II:

$$\vec{F}_e = q_e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}); \quad (\text{ley de fuerza de Lorentz}) \quad (1.6)$$

$$\vec{F}_g = q_g \vec{G} \quad (1.7)$$

Bloque III:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}_e + \vec{F}_g}{m}; \quad (\text{Segunda ley de Newton}) \quad (1.8)$$

Pasemos a “explicar” su significado.

Bloque I

Las cuatro primeras ecuaciones reciben colectivamente el nombre de ecuaciones de Maxwell. Nos dicen dos cosas. Por un lado nos dicen qué campos (eléctrico y magnético) genera un conjunto de cargas. Por otro, nos dan cómo se propagan estos campos por el espacio. La ecuación quinta es análoga al conjunto de ecuaciones de Maxwell, pero para el campo gravitatorio. Esto es, dado un conjunto de cargas gravitatorias, nos da el campo gravitatorio que generan. Estas ecuaciones las hemos escrito en forma integral, que como dijimos es equivalente (aunque su aspecto sería obviamente distinto) a escribir ecuaciones diferenciales. El hacerlo así es porque resulta más fácil comprender su significado.

Bloque II

Una vez que los campos se han generado y se han propagado por el espacio, alcanzan otras partículas ejerciendo fuerzas sobre ellas. La fuerza que ejercen los campos eléctricos y magnéticos está resumida en la ecuación sexta. Es lo que se llama Fuerza de Lorentz. La fuerza ejercida por el campo gravitatorio viene dada por la ecuación séptima. Habrá una ecuación de este tipo para cada partícula que compone el sistema.

Bloque III

Por último la ecuación octava, la segunda ley de Newton, nos permite calcular la aceleración de la partícula si conocemos las fuerzas (obtenidas a partir de todo el conjunto de ecuaciones anteriores) que actúan sobre ella y su masa. Al igual que ocurría con las ecuaciones sexta y séptima, habrá una ecuación de este tipo para cada partícula que compone el sistema.

1.6 La imagen clásica del universo

El universo está compuesto por partículas que se mueven al sentir los efectos de unas sobre las otras. Los electrones, protones, y neutrones forman átomos. Estos átomos se unen entre sí y forman moléculas. La materia presenta tres estados, sólido, líquido y gaseoso, según la manera que tengan los átomos y las moléculas de organizarse entre sí debido a sus interacciones mutuas. Los árboles, las hojas, las células, los edificios, los animales son, en última instancia, átomos agrupados de muy diversas formas. Cada partícula tiene asociadas tres propiedades escalares, que son: la carga eléctrica, que puede ser positiva o negativa, la carga gravitatoria, que tiene un único signo, y la masa. Diferenciamos entre carga gravitatoria y masa porque conceptualmente, para la Física Clásica, son cosas distintas⁴. Las partículas generan perturbaciones en el espacio absoluto que reciben el nombre de campos. Por ejemplo, cada partícula crea un campo gravitatorio, el cual es proporcional a la carga gravitatoria de la partícula y al inverso del cuadrado de la distancia a la partícula; también crea un campo eléctrico proporcional a la carga de la partícula, y si la partícula se mueve, un campo magnético. El valor de los campos gravitatorio y electromagnético en cada punto del espacio, creado por todas las partículas que hay en el universo, se puede obtener resolviendo, por un lado las cuatro ecuaciones de Maxwell que relacionan los campos eléctrico y magnético con las fuentes que los producen (las densidades de carga y las densidades de corriente), y la ley de Gauss para el campo gravitatorio. Cada partícula del universo se mueve a su vez debido a los campos que generan las demás. ¿Cómo? La presencia de un campo en un punto da lugar a una fuerza sobre otra partícula colocada en ese punto. Si \vec{E} , \vec{B} y \vec{G} son los campos eléctrico, magnético y gravitatorio en dicha posición, y q_e y q_g son la carga eléctrica y la carga gravitatoria de la partícula, y \vec{v} su velocidad, entonces la partícula está sometida a una fuerza $\vec{F} = q_e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) + q_g\vec{G}$. El primer término de la expresión anterior, el que contiene los campos eléctrico y magnético, es la fuerza de Lorentz; el segundo es la fuerza de gravitación. Debido a esta fuerza, la partícula experimenta una aceleración que es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa de la partícula, es decir, $\vec{a} = \vec{F}/m$ (segunda ley de Newton). Conocidas las condiciones iniciales del universo, es decir, la posición inicial y la velocidad inicial de cada partícula, y conocidos los campos eléctrico, magnético y gravitatorio y sus derivadas en el instante inicial, se podría conocer, aplicando las ecuaciones de Maxwell, la ley de Gauss para el campo gravitatorio, la ley de fuerzas de Lorentz y la segunda ley de Newton, dónde se encontrará cada partícula en cualquier instante futuro, así como el valor de los campos eléctrico, magnético y gravitatorio en dicho instante. Esta es la imagen clásica del universo,

⁴Para la Física Clásica es un misterio la inexistencia de partículas que, compartiendo la carga gravitatoria, tengan masas distintas. En cambio, existen muchas partículas que, compartiendo la carga eléctrica, tienen masas distintas (por ejemplo, el protón y el pión). El misterio lo resolvió Einstein al crear la Teoría General de la Relatividad, donde inercia y gravitación se funden en una misma unidad conceptual.

y nos muestra la importancia de la Física en el estudio del comportamiento de la naturaleza.

1.7 Las partes de la Física Clásica

La resolución del sistema de ecuaciones (1 \rightarrow 8) es, en la mayoría de los casos de interés, increíblemente difícil. Por tanto, se hace necesario simplificarlo, ya sea abordando sólo una parte del mismo, o añadiendo hipótesis adicionales que lo simplifiquen, aunque sea al coste de hacerlo menos general. Según qué parte del sistema (1 \rightarrow 8) abordemos, o qué hipótesis simplificativas adoptemos, nos moveremos en la arena propia de esta o aquella parte de la Física Clásica. Pero antes de comentar algo de cada una de ellas, es imprescindible avisar de que históricamente las ramas clásicas de la Física que vamos a comentar surgieron con anterioridad al establecimiento completo del sistema fundamental (1 \rightarrow 8). Sólo a posteriori ha sido posible deducir dichas ramas del conjunto formado por (1 \rightarrow 8) más las hipótesis antes aludidas.

La Óptica

Es el estudio de la luz. ¿Dónde apareció la luz en el esquema anterior? Dijimos que en el universo sólo existen partículas y campos eléctricos, magnéticos y gravitatorios. ¿Y la luz? ¿Qué es la luz? La luz es la conjunción de un campo eléctrico y uno magnético que cambian en el espacio y en el tiempo de una forma particular: propagándose como una onda. En esta propagación los campos pueden encontrarse con objetos tales como espejos, lentes, etc. Cuando esto ocurre, echando mano de las ecuaciones anteriores (1 \rightarrow 8) podríamos predecir cuál sería el resultado. Sin embargo un espejo o una lente están compuestos por multitud de partículas y estudiar la respuesta de todas estas partículas ante la presencia de un campo electromagnético (es así como se le llama a la existencia conjunta de un campo eléctrico y otro magnético) sería una labor de titanes. Por ello se opta por dos vías alternativas. Una consiste en hacer algunas aproximaciones y simplificaciones en el conjunto de las (1 \rightarrow 8) que lleven a una solución alcanzable del problema. Es lo que se llama *Óptica Ondulatoria*. La otra vía consiste en establecer una serie de teoremas deducidos de las ecuaciones anteriores válidos únicamente en casos muy idealizados. Es lo que se llama *Óptica Geométrica*. Quizá la diferencia fundamental entre una y otra Óptica resida en que históricamente la Óptica Geométrica no se obtuvo así. En realidad estos teoremas de los que hablo fueron obtenidos *experimentalmente*, se usaron durante mucho tiempo y a mediados del siglo pasado se vio que se podían deducir de una teoría mucho más general, que es la que está resumida en el conjunto de ecuaciones (1 \rightarrow 8).

Hemos dicho que la óptica trata del estudio de la luz, pero hemos de aclarar un poco más este punto. La luz se produce cuando el campo eléctrico y magnético están

vibrando a una frecuencia que ronda los 10^{15} Hz, o lo que es lo mismo, cuando la longitud de onda de estas oscilaciones es de unos cuantos cientos de nanómetros⁵. A frecuencias más altas o más bajas también pueden estar vibrado estos campos, pero nuestro ojo no percibe este movimiento en forma de luz, aunque su naturaleza es la misma. A frecuencias más bajas la radiación electromagnética (que así es como se le llama de forma genérica) recibe los nombres de infrarrojo y microondas. Las ondas de televisión y de radio corresponden aún a frecuencias más bajas. A frecuencias más altas (o lo que es lo mismo, a longitudes de onda más cortas) la radiación electromagnética se llama ultravioleta, rayos X y rayos gamma.

Como ya podéis imaginar, la carrera de Telecomunicaciones tiene mucho que ver con la habilidad para generar, conducir y detectar este tipo especial de movimiento de los campos eléctrico y magnético (electromagnético). Esto se consigue siempre aplicando el conjunto de ecuaciones (1 \rightarrow 8). Bueno, aunque he dicho siempre, existen situaciones en las que es imprescindible acudir a la Física Moderna, cada vez más, pero esto lo dejaremos para más adelante, cuando sepamos Física Clásica.

La Electricidad y el Magnetismo

El conjunto de ecuaciones de Maxwell no se gestó de la noche a la mañana, sino que fue fruto de la observación del comportamiento de las cargas y corrientes de éstas (corriente eléctrica). Asociada a esta observación hay un vasto repertorio fenomenológico⁶ acumulado durante años de Física “pre-maxwelliana”. Los primeros intentos de explicar esta fenomenología dieron lugar a un importante conjunto de “leyes”⁷ que es lo que muchas veces se estudia bajo el nombre de *Electricidad y Magnetismo*. Lo que ocurre es que cuando el repertorio de estas “reglas” de limitado alcance fue capaz de abarcar casi todos los fenómenos eléctricos y magnéticos conocidos, y además este conjunto fue ordenado, sistematizado y en la medida de lo posible, axiomatizado, nació la teoría de Maxwell. Muchos libros prefieren hacer una exposición de la Física (y en particular del Electromagnetismo) partiendo de este repertorio fenomenológico, en vez de dar desde el principio las ecuaciones (1 \rightarrow 8), y sólo al final, cuando se ha acumulado mucha evidencia empírica en forma de “reglas”, organizarla y decir que ello constituyen las ecuaciones de Maxwell, punto de partida, en realidad, de la teoría. Es como si en vez de conocer desde el principio la segunda Ley de Newton de la Mecánica, lo que nos dieran fuera la “fórmula” para un tiro parabólico, para un plano inclinado, el teorema de conservación de la energía, de la cantidad de movimiento, etc., y de ahí, con bastante esfuerzo deducir la gran ley, la segunda Ley de Newton. Creemos sin embargo que es preferible

⁵Un nanómetro (1nm) son 10^{-9} metros.

⁶O sea, de hechos experimentales sin que exista en principio una teoría que los explique.

⁷Cuando aquí utilizamos la palabra “leyes” no nos estamos refiriendo a leyes en el sentido lógico (básico), sino más bien sería sinónimo de “reglas” que aplicadas a una serie de fenómenos muy concretos permiten hacer predicciones, aunque bastante limitadas. La frontera que separa estos dos conceptos es obviamente bastante vaga y relativa.

dar las leyes (1 \rightarrow 8) y después aplicarlas a cada problema concreto, haciendo las aproximaciones que la situación requiera, para así no perder la idea de conjunto.

La Mecánica

Supongamos que tenemos una partícula que está sometida a una serie de fuerzas. El origen de estas fuerzas estará obviamente en los campos que la bañan, y estos a su vez fueron generados por otras partículas. Sin embargo todo esto no le interesa a la Mecánica. Lo único que sabemos es que sobre la partícula están actuando unas fuerzas. ¿Cómo se moverá la partícula? Este es el objetivo de la Mecánica. La respuesta está contenida en la segunda ley de Newton. En realidad, lo que se llama Mecánica no solamente se apoya en la segunda ley de Newton sino también en el llamado *principio de acción y reacción* (o tercera ley de Newton). Más adelante tendremos ocasión de ver el papel de este *principio* y su relación con el conjunto de ecuaciones (1 \rightarrow 8). También es cierto que muchas veces no se aplica directamente la segunda ley de Newton, sino los teoremas que de ella se deducen. Esto suele evitar hacer integrales, por la forma matemática de estos teoremas.

La Termodinámica

Cuando el sistema bajo estudio está compuesto por muchas partículas (un gramo de hierro o de aire), como suele ocurrir en la mayoría de los casos, la aplicación minuciosa de las ecuaciones (1 \rightarrow 8) resulta en la práctica imposible. Habría una ecuación del tipo de la (1.6), (1.7) y (1.8) para cada partícula y sería una locura intentar integrar el sistema⁸. Por ello, utilizando los teoremas de la Mecánica y una serie de consideraciones estadísticas aplicables siempre que se tienen grandes poblaciones, uno puede extraer una valiosa información acerca de algunas propiedades macroscópicas del sistema, como son su temperatura, su densidad, su conductividad eléctrica, calorífica, etc. Las consecuencias que se derivan de estos teoremas de la Mecánica y la Estadística quedan resumidas en dos grandes teoremas llamados Primer Principio de la Termodinámica y Segundo Principio de la Termodinámica, a partir de los cuales pueden extraerse, a su vez, todos los teoremas de la Termodinámica. El que se llamen Primer y Segundo *Principio* de la Termodinámica en vez de *teoremas* atiende a razones históricas. Originalmente el Primer y el Segundo Principio de la Termodinámica no fueron deducidos como teoremas, sino que se postularon atendiendo a la evidencia empírica. Fue después cuando los físicos se percataron de que era posible deducirlos de una teoría mucho más general, que abarcaba fenómenos que incluso trascendían de lo que hasta entonces habían dado en llamar Termodinámica. Nos referimos al conjunto de ecuaciones (1 \rightarrow 8). La parte de la Física que estudia la conexión de la Termodinámica con la Mecánica y las leyes estadísticas se llama Mecánica Estadística. Es una rama muy importante de la

⁸Sería una locura incluso plantear las ecuaciones.

Física actual, pues consigue explicar la aparición de propiedades macroscópicas como resultado de la aplicación de las leyes básicas ($1 \rightarrow 8$) a los sistemas microscópicos.

La Acústica

La Acústica es la parte de la Física que estudia los sonidos. Al igual que hemos dicho que la luz consiste en la propagación de ondas electromagnéticas, el sonido consiste en la propagación de ondas de presión. Cuando la frecuencia de estas ondas pertenece a un determinado rango nuestro oído es capaz de percibir las como sonido. La presión es el resultado macroscópico de multitud de impactos de las moléculas del medio por el que se propaga el sonido. El hecho de que el número de moléculas que tienen los sistemas físicos a la escala ordinaria⁹ es enorme permite hacer una hipótesis que suele simplificar extraordinariamente el estudio de dichos sistemas: La aproximación de medio continuo. Aunque a escala microscópica nuestro sistema tenga consistencia corpuscular, a la escala macroscópica puede pasar perfectamente por un medio continuo. Existen diversas ramas de la Física Clásica que adoptan la hipótesis de medio continuo y que constituyen la denominada Física de los medios continuos. La Termodinámica es un ejemplo, pero también la Acústica, la Mecánica de Fluidos, la Elasticidad, etc.

⁹Del orden del número de Avogadro: $N_A \simeq 10^{23}$.

Capítulo 2

CINEMÁTICA DEL PUNTO

2.1 Sistemas de referencia

Se dice que un cuerpo en el espacio está en *movimiento relativo* respecto a otro cuerpo u objeto cuando su posición relativa a éste varía con el tiempo.

La primera característica que se desprende de la noción de movimiento es su relatividad. En efecto, éste depende del objeto al cual está referido. A este objeto se le denomina *observador*, de manera que distintos observadores aprecian en general distintos movimientos para un mismo objeto. Por ejemplo, el movimiento de una pelota que dejamos caer en un tren es distinto visto por un observador ligado a Tierra que por otro ligado al propio tren.

El siguiente problema que nos planteamos una vez definido el observador, es cómo se realiza matemáticamente la descripción del movimiento, lo cual es objeto de la Cinemática. Para ello, vamos a profundizar un poco más en la naturaleza del observador definiéndolo como un *sólido rígido* o sistema de puntos materiales cuyas distancias relativas permanecen siempre constantes. Si bien en la naturaleza no existen cuerpos totalmente rígidos, esta simplificación se puede aplicar a los sistemas materiales en los cuales la variación en las distancias relativas de sus partículas es

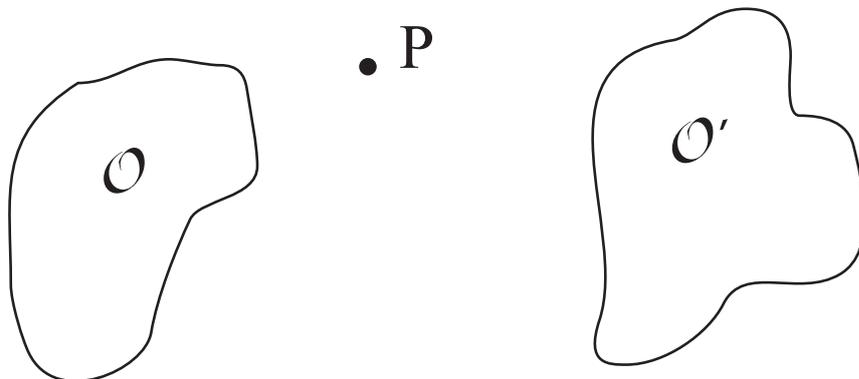


Figura 2.1: El movimiento de un punto P referido a dos observadores O y O' .

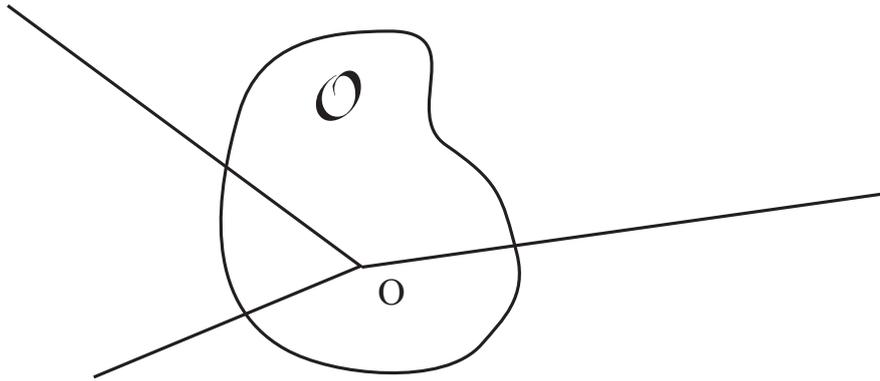


Figura 2.2: Los sistemas de referencia caracterizan al observador.

despreciable desde un punto de vista macroscópico. En todo caso, para el desarrollo de la teoría podemos considerar siempre la existencia de *sólidos ideales* para la descripción del movimiento.

El ejemplo de observador con el que más nos sentimos identificados es el de la propia Tierra. Nuestra concepción del movimiento está ligada a nuestras observaciones realizadas desde la superficie terrestre.

Dado un sólido rígido, se denomina *sistema de referencia* al conjunto formado un punto O del sólido y tres rectas no coplanarias del mismo que pasan por O . A este punto se le denomina *origen* del sistema de referencia (figura 2.2).

Cuando las tres rectas son ortogonales, el sistema de referencia se denomina *rectangular*.

Como la elección del origen es arbitraria, un observador puede definir infinitos sistemas de referencia. Por otro lado, cada sistema de referencia está ligado a un único observador. En adelante, utilizaremos indistintamente ambos términos para referirnos al mismo sólido.

Por otro lado, si bien el sólido real tiene una extensión finita, cualquier sistema de referencia asociado a un cuerpo rígido define un sólido que tiene infinitos puntos, cada uno de ellos ocupando una posición fija respecto al mismo.

Un *sistema de coordenadas* es una regla concreta que permite asignar a cada punto P del espacio un conjunto de tres números que define biunívocamente su posición respecto a un sistema de referencia.

El sistema de coordenadas más utilizado es el *cartesiano rectangular*, el cual está definido a partir de las distancias x_1 , x_2 y x_3 entre el punto y tres planos ortogonales que se cortan en el punto O , origen del sistema de referencia. Estos números tienen signo positivo o negativo según el semiespacio en que se encuentre el punto respecto a cada plano.

Los tres planos se cortan dos a dos en rectas que constituyen los denominados *ejes coordenados*¹ OX_1 , OX_2 y OX_3 , y que constituyen un sistema de referencia

¹Otra notación bastante utilizada es llamar x , y y z a las tres coordenadas cartesianas y OX ,

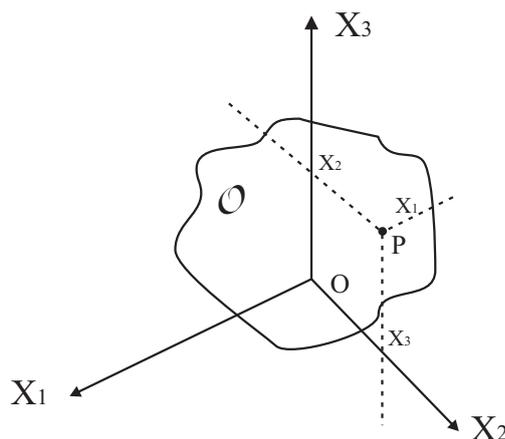


Figura 2.3: Sistema de coordenadas cartesianas rectangular.

rectangular (figura 2.3).

Dado un punto P en movimiento relativo respecto a un sistema de referencia \mathcal{O} , se define el *vector de posición* de P respecto a \mathcal{O} , al vector que tiene su punto de aplicación en el origen O del sistema de referencia y cuyo extremo es P . Designándolo por \vec{r} , tenemos

$$\vec{r} = \vec{OP} . \quad (2.1)$$

Si elegimos para dar la posición de P en el espacio un sistema de coordenadas rectangulares (x, y, z) , el vector de posición se puede expresar en la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ formada por los tres vectores unitarios cuyas direcciones son las de los ejes coordenados, como (figura 2.4):

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} . \quad (2.2)$$

Por tanto, las coordenadas cartesianas coinciden con las componentes del vector de posición en la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Si la posición de P es la misma para todo instante de tiempo se dice que está en *reposo relativo* respecto a \mathcal{O} . Por otro lado, cuando el vector de posición varía con el tiempo el punto describe un lugar geométrico denominado *trayectoria*.

Dado que el movimiento es relativo, la trayectoria depende del observador. Por ejemplo, si consideramos tan sólo la acción del campo gravitatorio terrestre, un objeto que se deja caer al mar desde un barco que se mueve a velocidad constante respecto a Tierra, tiene un movimiento rectilíneo para un observador ligado al barco. Para un observador ligado a Tierra, el cual ve al barco en movimiento, la trayectoria del objeto es una parábola.

OY , OZ a los ejes coordenados. En lo sucesivo, utilizaremos ambas indistintamente.

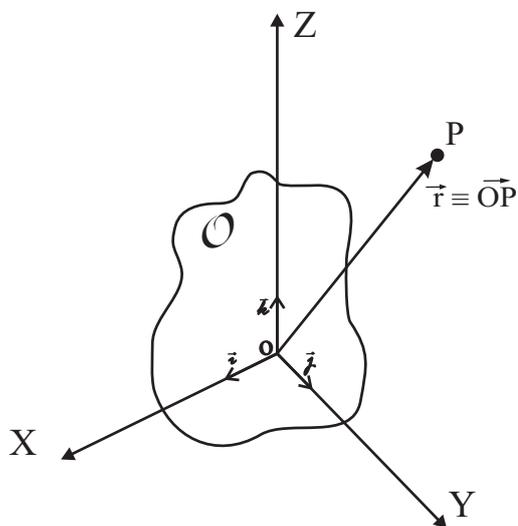


Figura 2.4: Vector de posición.

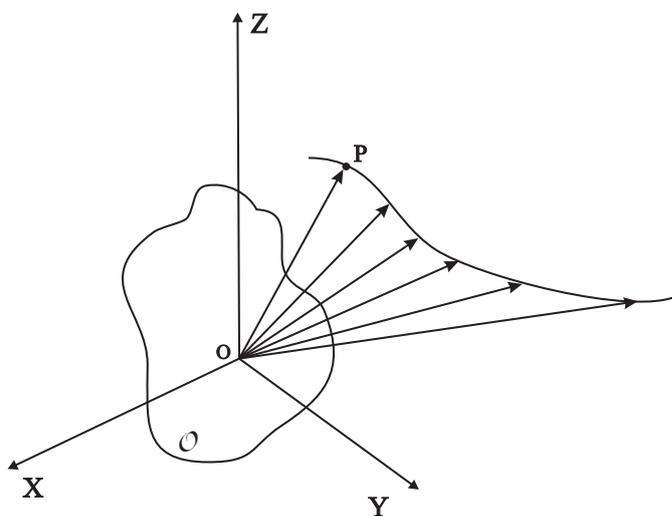


Figura 2.5: La trayectoria es el lugar geométrico de los extremos del vector de posición.

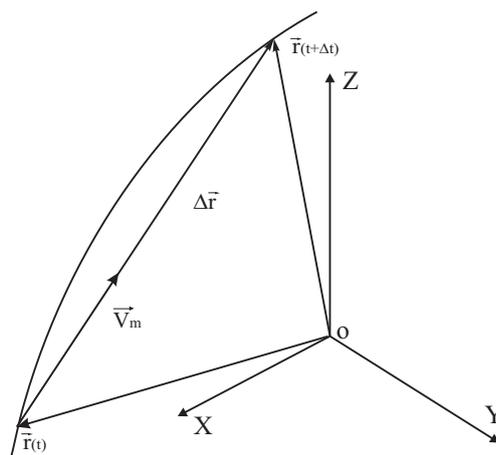


Figura 2.6: Velocidad media.

2.2 Velocidad

Sean $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}(t + \Delta t)$ los vectores de posición de un punto móvil respecto a un observador \mathcal{O} en los instantes de tiempo t y $t + \Delta t$. Se define el *vector desplazamiento* en dicho intervalo a la diferencia

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t). \quad (2.3)$$

A partir de $\Delta\vec{r}$, definimos la *velocidad media* del punto entre los instantes t y $t + \Delta t$, como:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.4)$$

Como \vec{v}_m es paralelo a $\Delta\vec{r}$, este vector lleva la dirección de la secante a la trayectoria descrita por el punto entre los puntos $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}(t + \Delta t)$ (figura 2.6).

La velocidad media permite conocer la variación del vector de posición por unidad de tiempo entre dos puntos dados de la trayectoria. Si queremos calcular esta variación considerando dos puntos infinitamente próximos, debemos tomar en (2.4) el límite cuando Δt tiende a cero, obteniendo lo que se conoce como *velocidad instantánea* o simplemente, *velocidad* del punto en el instante t .

Como la operación de tomar límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ coincide con la definición de derivada, tenemos ²:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.5)$$

Si \vec{r} está expresado a partir de (2.2), la velocidad se expresa como

²Otra forma de denotar la derivada temporal es colocando un punto encima del vector, es decir $\frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$. En caso de que sea una derivada segunda, se colocarán dos puntos. En adelante, ambas notaciones serán utilizadas indistintamente.

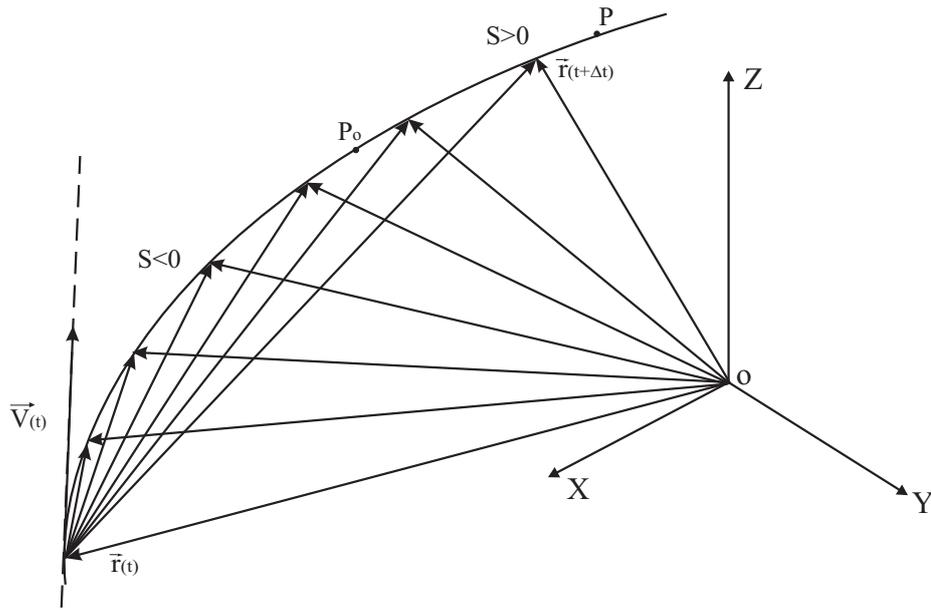


Figura 2.7: La velocidad es un vector tangente a la trayectoria en cada punto.

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}, \quad (2.6)$$

de manera que las componentes de \vec{v} según los ejes OX , OY y OZ son

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (2.7)$$

Al obtener (2.6) a partir de (2.2) hemos tenido en cuenta que los vectores de la base son fijos respecto al observador, siendo por tanto nula su derivada temporal. En el Sistema Internacional la unidad de velocidad es el m/s .

Nótese que cuando Δt se aproxima a cero, el vector desplazamiento va cambiando continuamente de módulo y dirección de manera que en el límite $\Delta t \rightarrow 0$ el desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ lleva la dirección de la tangente a la curva en el punto M . Por tanto, la velocidad es un vector tangente a la trayectoria. Su módulo se denomina *celeridad*, y viene dado por:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{dS}{dt}, \quad (2.8)$$

siendo $dS = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ la distancia entre dos puntos infinitamente próximos sobre la trayectoria.

A continuación, vamos a expresar la velocidad a partir de un vector unitario tangente definido en cada punto de la curva. Para ello, consideremos un punto arbitrario de la trayectoria P_0 . Se define la *coordenada de arco* s de un punto P , al desplazamiento P_0P medido a lo largo de la curva y con un signo positivo o negativo según que P se encuentre a un lado u otro de P_0 .

Sea Δs el incremento del arco entre los puntos $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}(t + \Delta t)$. Multiplicando y dividiendo en (2.4) por Δs , tenemos:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r} \Delta s}{\Delta s \Delta t} \rightarrow \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \left(\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}. \quad (2.9)$$

Cuando Δs tiende a 0, ya hemos visto que $\Delta \vec{r}$ pasa a ser un vector infinitesimal $d\vec{r}$ cuya dirección es tangente a la curva. Por otro lado, su módulo coincide con ds , para $ds > 0$, dado que ésta es la distancia entre dos puntos infinitamente próximos. Por tanto, $d\vec{r}/ds$ es un vector unitario tangente (figura 2.7), de modo que

$$\vec{v} = v_T \vec{T}, \quad (2.10)$$

siendo

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad ; \quad v_T = \frac{ds}{dt}. \quad (2.11)$$

v_T es la proyección de la velocidad en la dirección de \vec{T} , la cual puede ser positiva o negativa según que la coordenada de arco s aumente o disminuya con el tiempo. Por otro lado,

$$|v_T| = \left| \frac{ds}{dt} \right| = v. \quad (2.12)$$

2.3 Aceleración

Sean $\vec{v}(t)$ y $\vec{v}(t + \Delta t)$ las velocidades del punto móvil P respecto a un observador \mathcal{O} en los instantes de tiempo t y $t + \Delta t$. Se define la *aceleración media* en dicho intervalo, al vector

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad (2.13)$$

siendo $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$.

La *aceleración instantánea*, a la que a partir de ahora llamaremos simplemente *aceleración* en el instante t , se define como:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (2.14)$$

Teniendo en cuenta (2.6) y (2.7), tenemos

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (2.15)$$

siendo

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad ; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad ; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}. \quad (2.16)$$

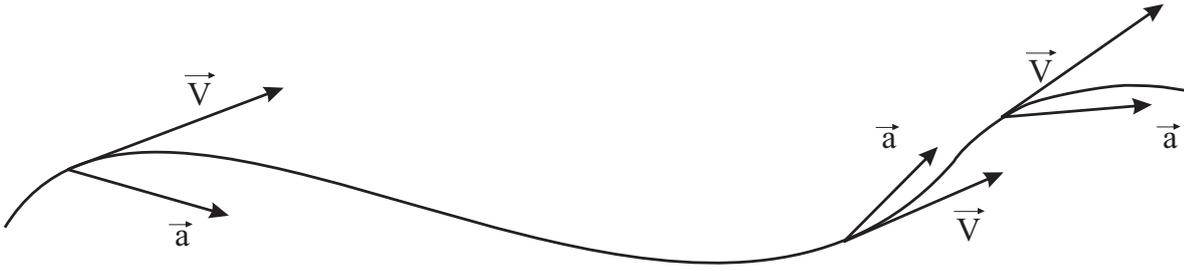


Figura 2.8: La aceleración es un vector cuyo sentido está dirigido hacia el lado cóncavo de la curva.

En el Sistema Internacional la aceleración se mide en m/s^2 .

El módulo de \vec{a} viene dado por:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.17)$$

2.4 Componentes tangencial y normal de la aceleración

Como la velocidad varía tanto en módulo como en dirección, la aceleración, que representa la variación instantánea de la velocidad por unidad de tiempo, no es en general un vector tangente a la curva. Por otro lado, como la velocidad varía en el sentido en que se curva la trayectoria, \vec{a} apunta siempre hacia la parte cóncava de la misma.

A continuación, vamos a descomponer la aceleración en sus componentes tangencial y normal, para lo cual partiremos de la expresión de la velocidad dada por (2.10). Derivando respecto al tiempo, tenemos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_T}{dt} \vec{T} + v_T \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{dv_T}{dt} \vec{T} + v^2 \frac{d\vec{T}}{ds}, \quad (2.18)$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} v_T \quad ; \quad v_T^2 = v^2.$$

Por otro lado, al ser \vec{T} unitario, entonces $\vec{T} \cdot \vec{T} = 1$. Derivando respecto al arco se obtiene fácilmente:

$$\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0, \quad (2.19)$$

es decir, $d\vec{T}/ds$ es perpendicular a \vec{T} . En geometría diferencial este vector se expresa de la forma siguiente:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = K(s)\vec{N}. \quad (2.20)$$

\vec{N} es un vector unitario perpendicular a la trayectoria y que apunta hacia la parte cóncava de la misma. Se denomina *vector normal*. Por otro lado,

$$K(s) = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|. \quad (2.21)$$

K se denomina *curvatura* y a su inverso $\rho_c(s) = 1/K(s)$, *radio de curvatura*.

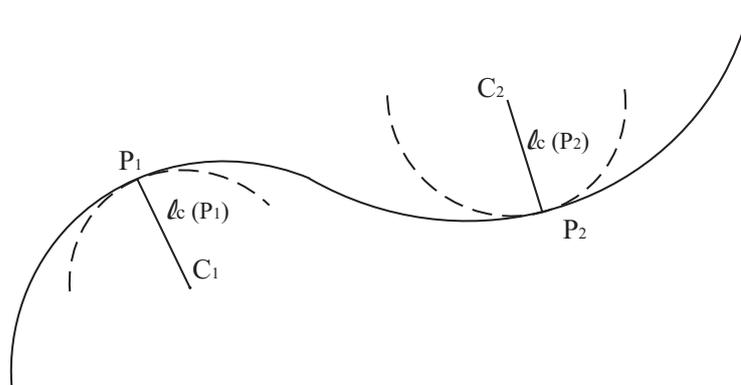


Figura 2.9: Interpretación geométrica de la curvatura y del radio de curvatura. El centro de curvatura C varía de un punto a otro de la trayectoria. La distancia entre C y el punto P es el radio de curvatura, el cual es inversamente proporcional a la curvatura.

El significado geométrico de la curvatura es el siguiente: como \vec{T} es unitario, el módulo de su derivada mide lo que varía su dirección en cada punto. Si $|d\vec{T}/ds|$ es muy grande, ello significa que la trayectoria se “curva” mucho en el punto considerado.

Para dar una interpretación geométrica a ρ_c tendríamos que tener conocimientos de geometría diferencial que se escapan de los límites de este tema. No obstante, se puede demostrar que esta cantidad representa el radio de la circunferencia que mejor se aproxima a la curva en cada punto, denominada *circunferencia osculatriz*. Su centro, denominado *centro de curvatura*, está situado en la dirección normal a la trayectoria en cada punto, y a una distancia ρ_c del mismo (figura 2.9).

Nótese que tanto K como ρ_c son características *intrínsecas* a cada trayectoria, puesto que se definen a partir de la variación del vector unitario tangente, el cual no depende del tiempo sino de la forma de la curva. Por ejemplo, en el caso de una trayectoria rectilínea $K = 0$ dado que \vec{T} es un vector constante y su derivada es igual a cero; el radio de curvatura en este caso tiende a infinito. Otro ejemplo es el de una trayectoria circular. En este caso la dirección del vector tangente varía de la

misma forma en todos los puntos siendo la curvatura igual a una constante; el radio de curvatura es constante e igual al de la propia circunferencia (figura 2.10).

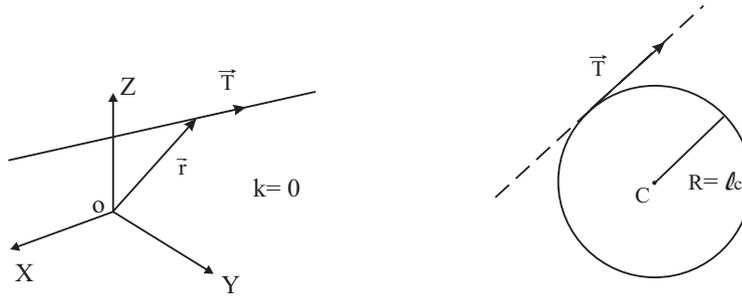


Figura 2.10: La curvatura representa como varía la dirección del vector tangente a la trayectoria en cada punto de la misma. En el caso de una recta $K = 0$, y en el caso de una trayectoria circular $K = cte$.

Teniendo en cuenta (2.18) y (2.20), la aceleración puede expresarse a partir de sus componentes tangencial y normal como

$$\vec{a} = \frac{dv_T}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{\rho_c} \vec{N} \equiv \vec{a}_T + \vec{a}_N, \quad (2.22)$$

donde

$$\vec{a}_T = \frac{dv_T}{dt} \vec{T} = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{T}, \quad (2.23)$$

y

$$\vec{a}_N = \frac{v^2}{\rho_c} \vec{N}. \quad (2.24)$$

\vec{a}_T y \vec{a}_N se denominan respectivamente ³ *aceleración tangencial* y *aceleración normal*.

El módulo de la aceleración tangencial es igual al módulo de la derivada de la celeridad respecto al tiempo:

$$|\vec{a}_T| = |dv_T/dt| = |dv/dt|. \quad (2.25)$$

³Las expresiones de la velocidad y la aceleración a partir de los vectores tangente y normal se suelen denominar “intrínsecas”. En general, dada una curva en el espacio, se puede definir en cada punto de la misma una base formada por tres vectores unitarios perpendiculares entre sí. Ya hemos visto dos de estos vectores: el vector tangente \vec{T} , y el vector normal \vec{N} . El tercer vector, denominado *binormal*, se define como

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}.$$

Estos tres vectores forman en cada punto de la curva un triedro denominado en Geometría Diferencial *Triedro de Frenet* o *Triedro Intrínseco*. A las componentes de la velocidad y la aceleración en esta base se las denomina *componentes intrínsecas*. Vemos que ninguno de estos vectores tiene componente según la binormal, sino que siempre están contenidos en el plano constituido en cada punto de la curva a partir de los vectores tangente y normal. A este plano se le denomina *osculador*.

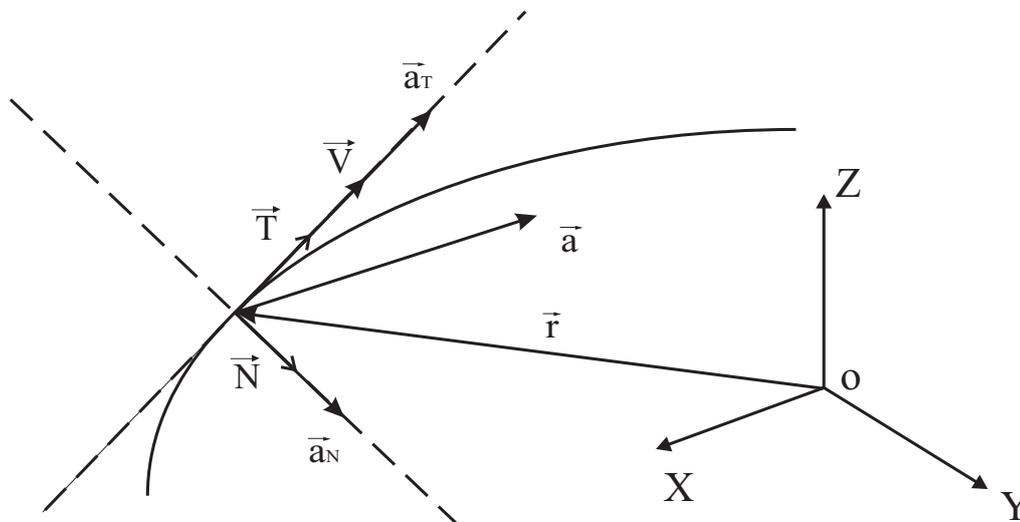


Figura 2.11: Componentes tangencial y normal de la aceleración.

Por otro lado, el signo de dv/dt viene determinado por la proyección de la aceleración sobre la dirección de la velocidad. Para verlo, sólo tenemos que utilizar las expresiones intrínsecas de la velocidad y la aceleración dadas por (2.10) y (2.22):

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = v_T \frac{dv_T}{dt} = v \frac{dv}{dt} \rightarrow$$

$$\vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}. \quad (2.26)$$

De esta forma, cuando $\vec{a} \cdot \vec{v}$ es > 0 (< 0), entonces dv/dt es > 0 (< 0), y el movimiento se denomina *acelerado*, (*retardado*). Cuando $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$, entonces $dv/dt = 0$ y el movimiento se denomina uniforme (figura 2.12).

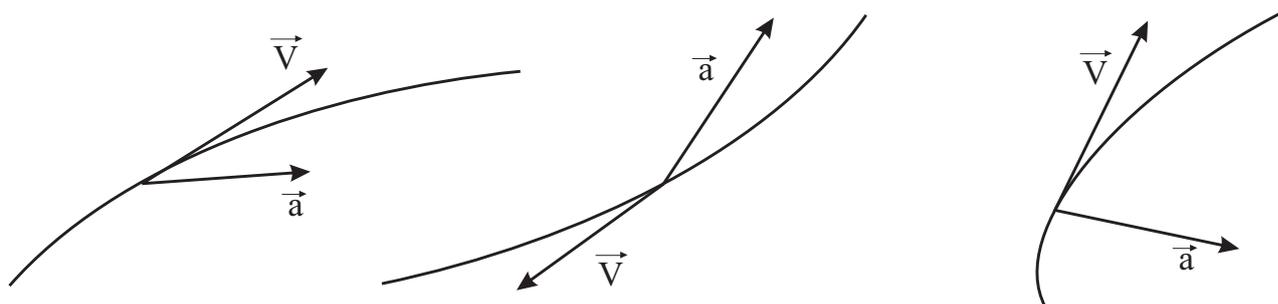


Figura 2.12: El movimiento es acelerado, retardado o uniforme en cada punto dependiendo del ángulo que forman la velocidad y la aceleración.

Como las aceleraciones tangencial y normal son perpendiculares, el módulo de la aceleración es

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_T|^2 + |\vec{a}_N|^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho_c}\right)^2}. \quad (2.27)$$

2.5 Movimiento relativo

Vamos a investigar ahora cómo están relacionados los movimientos de un mismo punto observados desde dos sistemas de referencia en movimiento relativo. Pero obsérvese que si los sistemas de referencia están en movimiento relativo deberíamos investigar primero este movimiento. ¡Y ese es un problema, no de cinemática del punto, sino del sólido rígido (un sistema de referencia es, o define, un sólido rígido)! El estudio de la cinemática del sólido rígido rebasa con creces las pretensiones de nuestro breve repaso de la cinemática del punto, y no lo vamos a abordar en su máxima generalidad. En vez de ello, nos vamos a limitar al caso más sencillo posible: El movimiento de traslación rectilínea.

Consideremos dos sistemas de referencia, que denominaremos “0” y “1”, en movimiento relativo de traslación rectilínea en una dirección arbitraria, y un punto P que se mueve con un movimiento arbitrario que, en general, será distinto según lo observe “0” ó “1”.

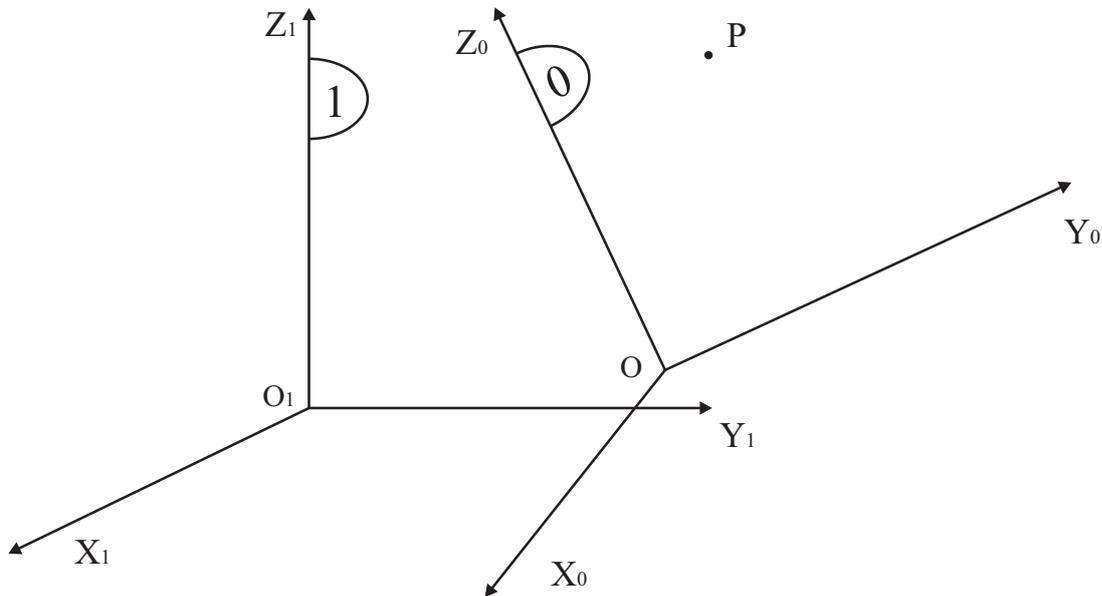


Figura 2.13: El movimiento de P puede observarse desde “0” ó “1”.

Consideremos primero el movimiento de “0” respecto de “1”. Sea P_0 un punto cualquiera perteneciente a “0” (usamos el subíndice para distinguirlo del punto P arbitrario, que no pertenece a “0”). La posición del origen O cambia con el tiempo

y la de P_0 también, sin embargo, el hecho de que el movimiento de “0” respecto a “1” sea una traslación significa que el vector $\overrightarrow{OP_0}$ no cambia con el tiempo, es decir:

$$\frac{d\overrightarrow{OP_0}}{dt} = 0. \quad (2.28)$$

A partir de aquí se puede deducir que en el movimiento de “0” respecto de “1” todos los puntos tienen la misma velocidad. En efecto, derivando con respecto al tiempo la igualdad:

$$\overrightarrow{O_1P_0} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OP_0}, \quad (2.29)$$

y teniendo en cuenta (2.28) nos queda:

$$\frac{d\overrightarrow{O_1P_0}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt}. \quad (2.30)$$

Es decir, las velocidades de P_0 y O respecto de 1 son iguales:

$$\vec{v}_1^{P_0} = \vec{v}_1^O. \quad (2.31)$$

En esta expresión el subíndice indica el sistema desde el que se observa la velocidad. Derivándola con respecto al tiempo descubrimos que en el movimiento de traslación de “0” respecto de “1” todos los puntos tienen la misma aceleración:

$$\vec{a}_1^{P_0} = \vec{a}_1^O. \quad (2.32)$$

Ahora ya estamos en condiciones de investigar cómo se relacionan los movimientos de P en “0” y “1”. Para ello vamos a partir de la igualdad:

$$\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OP}. \quad (2.33)$$

Derivándola con respecto al tiempo:

$$\vec{v}_1^P = \vec{v}_1^O + \vec{v}_0^P, \quad (2.34)$$

y volviéndola a derivar:

$$\vec{a}_1^P = \vec{a}_1^O + \vec{a}_0^P. \quad (2.35)$$

Las ecuaciones (2.34) y (2.35) constituyen el resultado que íbamos buscando. Se pueden reescribir de un modo más fácil de recordar si sustituimos en ellas las velocidades y aceleraciones de O mediante las ecuaciones (2.31) y (2.32):

$$\vec{v}_1^P = \vec{v}_0^P + \vec{v}_1^{P_0} \quad (2.36)$$

$$\vec{a}_1^P = \vec{a}_0^P + \vec{a}_1^{P_0}. \quad (2.37)$$

Estas ecuaciones nos dicen que la velocidad (aceleración) de P vista desde “1” es la misma que la velocidad (aceleración) de P vista desde “0” más la velocidad (aceleración) que tendría P si estuviera ligado rígidamente a “0” (es decir, P_0) vista desde “1”.

Capítulo 3

PRINCIPIOS DE LA DINÁMICA CLÁSICA

3.1 Introducción

En el desarrollo de este tema, cuyo objeto de estudio son los principios de la dinámica, comenzaremos describiendo las causas del movimiento a partir del concepto de fuerza. Introduciremos también el concepto de masa inercial, como una propiedad inherente a los cuerpos materiales, y que junto a las fuerzas constituye la base conceptual de la mecánica clásica vectorial.

A partir de los conceptos cinemáticos y los nuevos conceptos de fuerza y masa, desarrollaremos la teoría partiendo de dos postulados fundamentales. El primero, conocido como la 2^a ley de Newton, establece la relación entre la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula y su aceleración en un tipo especial de sistemas de referencia, los observadores inerciales. El segundo, conocido como principio de acción y reacción o 3^a ley de Newton, constituirá junto con el anterior la base para el estudio del movimiento mecánico de los objetos materiales.

Si bien en la mayoría de los tratados de mecánica vectorial la teoría se desarrolla a partir de tres leyes, siendo la primera la *ley de inercia* que no hemos considerado, ésta aparecerá como una consecuencia inmediata de la segunda ley de Newton.

También haremos un estudio del movimiento desde los sistemas no inerciales, en los cuales no se verifica la segunda ley de Newton, introduciendo las denominadas fuerzas ficticias o de inercia.

3.2 Fuerza

3.2.1 Concepto de fuerza

Para describir las interacciones existentes entre los cuerpos se utiliza una magnitud vectorial \vec{F} denominada *fuerza*. Las fuerzas se representan por vectores ligados ¹, pues todos los atributos que corresponden a este tipo de vectores son necesarios para caracterizar la acción de un cuerpo sobre otro. Es decir, las fuerzas se caracterizan por un punto de aplicación, módulo, dirección y sentido.

3.3 La interacción gravitacional

Las fuerzas que aparecen en el ámbito de la dinámica clásica son la gravitatoria y la electromagnética. La interacción electromagnética tiene su origen en la *carga eléctrica* asociada a los cuerpos y depende de un modo muy complejo del movimiento de los mismos. La mayoría de los fenómenos que observamos son el resultado de las interacciones de carácter electromagnético entre los átomos y moléculas que constituyen la materia. No vamos a considerarla puesto que corresponde al electromagnetismo su estudio.

No obstante, sí merece la pena hablar de la interacción gravitatoria, dado que esta fuerza tiene su origen en una propiedad inherente a todos los cuerpos materiales que denominaremos *carga gravitatoria* ². La *ley de gravitación universal*, formulada por Newton, establece que:

“La fuerza con que se atraen dos puntos de cargas gravitatorias m_{g_1} y m_{g_2} es directamente proporcional al producto de sus cargas gravitatorias e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Esta fuerza está dirigida sobre la línea que une ambas partículas.” Es decir,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \gamma \frac{m_{g_1} m_{g_2}}{r^2} \vec{e}_r, \quad (3.1)$$

siendo γ una constante universal (es decir, la misma para todas las partículas del universo) cuyo valor depende del sistema de unidades utilizado, \vec{e}_r el vector unitario

¹Las magnitudes vectoriales se representan mediante vectores libres, deslizantes o fijos. *Libre* es el vector que puede tener cualquier punto de aplicación en el espacio. Un vector es *deslizante* cuando puede tener cualquier punto de aplicación sobre la recta que lo contiene, la cual recibe el nombre de *línea de acción*. Finalmente, un vector es *ligado* cuando su punto de aplicación está fijado. La utilización de estas clases de vectores en un problema físico concreto viene determinada por las magnitudes que intervienen en el problema, así como por la naturaleza del mismo.

²En principio, esta propiedad de la materia responsable de la interacción gravitatoria no tiene nada que ver con la masa inercial que interviene en la segunda ley de Newton. Nótese que la expresión (3.1) de la ley de gravitación universal es completamente análoga a la fuerza electrostática entre cargas eléctricas dada por la ley de Coulomb. Por ello hemos llamado *carga gravitatoria* a la propiedad de la materia responsable de la interacción gravitacional, para hacer hincapié en el hecho de que masa inercial y carga gravitatoria son conceptos de diferente sentido físico.

en la dirección y sentido $\vec{1}_2$, y \vec{F}_{12} la fuerza sobre 1 ejercida por 2.

3.4 Concepto de masa inercial

En el planteamiento formal de la dinámica, se introduce el concepto de *masa inercial* o *masa inerte* como una propiedad intrínseca a cada cuerpo material, la cual está representada por un escalar positivo.

3.5 Leyes de la dinámica clásica vectorial

A continuación, vamos a enunciar los dos postulados que constituyen la base para la descripción clásica no relativista de los fenómenos mecánicos. Además, veremos las consecuencias inmediatas que se infieren de los mismos, las cuales se han considerado siempre “principios” fundamentales de la dinámica. Estos postulados se refieren al punto material, y son también la base para la descripción de la dinámica de los sistemas de partículas.

3.5.1 Primer postulado (Segunda ley de Newton)

El primer principio, conocido como 2^a ley de Newton, dice lo siguiente:

“Se postula la existencia de sistemas de referencia, denominados sistemas inerciales, en los cuales la resultante \vec{F} de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula puntual de masa inercial m , es igual al producto de m por la aceleración del punto”.

Es decir, en estos sistemas de referencia se verifica

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (3.2)$$

Los sistemas en los que $\vec{F} \neq m\vec{a}$ se denominan *sistemas no inerciales*.

De (3.2) se obtienen las siguientes consecuencias:

1. Principio de inercia (o de Galileo) o 1^a ley de Newton:

“Si la partícula está aislada o si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la misma es nula, se moverá indefinidamente con velocidad constante respecto a un sistema inercial”.

Es decir, cuando $\vec{F} = \vec{0}$ la partícula tendrá indefinidamente un movimiento rectilíneo uniforme, o permanecerá en reposo si su velocidad es nula. A este movimiento se le denomina “movimiento por inercia”.

2. Cualquier sistema de referencia que realiza una traslación pura a velocidad constante respecto a un observador inercial, observa la misma aceleración para

la partícula. Para verlo, consideremos dos sistemas, 1 y 0, tal que los ejes “0” se trasladan respecto a “1”, siendo constante la velocidad de traslación. El observador “1” es inercial, de manera que $\vec{F} = m\vec{a}_1^P$. Por otro lado, se sabe³ que

$$\vec{a}_1^P = \vec{a}_0^P + \vec{a}_1^{P_0} = \vec{a}_0^P, \quad (3.3)$$

dado que $\vec{a}_1^{P_0}$ es nulo. Por tanto, también se verificará (3.2) desde “0”. Es decir, existen infinitos sistemas inerciales moviéndose uno con respecto a otro a velocidad constante. En todos ellos se verifica (3.2). Esto trae consigo el “Principio de relatividad de Galileo”:

“Todos los sistemas inerciales son equivalentes desde un punto de vista mecánico, es decir, las leyes de la dinámica son invariantes cuando se pasa de un sistema inercial a otro”.

3.5.2 Segundo postulado (Principio de acción y reacción o tercera ley de Newton)

Este 2º principio dice así:

“La fuerza que ejerce una partícula “1” sobre otra partícula “2” es igual en módulo, dirección y de sentido contrario a la que ejerce “2” sobre “1”, y ambas fuerzas están dirigidas sobre la línea que une ambos puntos materiales”. Es decir:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (3.4)$$

La fuerza con que interaccionan dos partículas depende, entre otros factores, de la distancia entre ambas. Si la posición de una las partículas cambia, entonces se altera instantáneamente el estado de la otra, pues cambia su aceleración (al variar la fuerza de interacción). Esto ocurre instantáneamente sea cual sea la distancia existente entre ambos puntos materiales, dado que (3.4) se verifica para cualquier instante. Por tanto, una consecuencia inmediata del principio de acción y reacción es el *principio de acción a distancia* de la mecánica clásica, según el cual:

“la interacción entre dos partículas se propaga en el espacio a una velocidad infinita”.

³Recuérdese que esta ecuación se dedujo para el caso particular en que el movimiento de “0” respecto de “1” era una traslación rectilínea. Si el movimiento fuese arbitrario, entonces a la expresión (3.3) hay que añadirle el término $2\vec{\omega}_1^0 \wedge \vec{v}_0^P$, denominado aceleración de Coriolis, donde $\vec{\omega}_1^0$ es la velocidad angular de “0” respecto de “1”.

3.6 Sistemas no inerciales. Fuerzas de inercia

Hemos dicho que las leyes enunciadas en el apartado anterior son válidas tan sólo cuando el sistema de referencia es inercial. Veamos a continuación como sería la descripción de un problema mecánico desde un observador no inercial. Dos sistemas de referencia, que llamaremos “1” y “0”, observan el movimiento de un punto material de masa m . El observador “1” es inercial, de modo que en este sistema se verifica la 2ª ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}_1^P.$$

Por otro lado, supongamos que el observador “0” no es inercial. Para obtener la relación que existe entre la fuerza y aceleración del punto desde “0”, vamos a partir de la composición de aceleraciones⁴

$$\vec{a}_1^P = \vec{a}_0^P + \vec{a}_1^{P_0} + 2\vec{\omega}_1^0 \wedge \vec{v}_0^P. \quad (3.5)$$

Multiplicando por m la ecuación (3.5) y teniendo en cuenta que se verifica la segunda ley de Newton desde “1”, tenemos

$$m\vec{a}_0^P = \vec{F} - m\vec{a}_1^{P_0} - 2m\vec{\omega}_1^0 \wedge \vec{v}_0^P. \quad (3.6)$$

Por tanto, $\vec{F} \neq m\vec{a}_0^P$. Es decir, la aceleración del punto desde “cero” no está determinada sólo por las fuerzas, sino además, por las propiedades de “cero” en su movimiento relativo respecto a “1”. No obstante, para la descripción del movimiento en sistemas no inerciales, se puede conservar la ecuación $\vec{F} = m\vec{a}$, introduciendo las denominadas *fuerzas ficticias o de inercia*:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_a + \vec{F}_c, \quad (3.7)$$

siendo

$$\vec{F}_a = -m\vec{a}_1^{P_0}, \quad (3.8)$$

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}_1^0 \wedge \vec{v}_0^P. \quad (3.9)$$

\vec{F}_a y \vec{F}_c se conocen respectivamente como *fuerza de arrastre* y *fuerza de Coriolis*. De esta forma, (3.6) quedará

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_i = m\vec{a}_0^P. \quad (3.10)$$

⁴Véase la nota anterior.

Capítulo 4

TEOREMAS GENERALES DE LA DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL

4.1 Introducción

En el tema anterior hemos estudiado los principios fundamentales de la dinámica. La segunda ley de Newton, que relaciona la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el punto material con su aceleración nos permite obtener, conocidas las fuerzas y las condiciones iniciales \vec{r}_0 y \vec{v}_0 , el movimiento de una partícula respecto a un sistema inercial. La expresión matemática de esta ley relaciona la aceleración del punto con una función vectorial \vec{F} que depende en general de su posición, su velocidad y el tiempo, es decir,

$$\vec{F}(\vec{r}; \vec{v}; t) = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (4.1)$$

En general, cualquier problema de dinámica se rige por la ecuación anterior, de manera que se debe integrar¹ (4.1) para obtener el movimiento. No obstante, en muchos problemas el objetivo no es conocer el movimiento en función del tiempo, sino tan sólo ciertas características del mismo.

En este tema vamos a estudiar tres teoremas que se deducen de la segunda ley de Newton, y que permiten abordar innumerables problemas en los que las propiedades de las fuerzas nos permiten obtener información del movimiento sin tener que partir de (4.1). Tal información estará expresada a partir de *integrales primeras* del movimiento, es decir, expresiones en las que aparecen relacionadas la velocidad, la posición y el tiempo, y que se deducen fácilmente de la aplicación

¹A veces los físicos (y los ingenieros) hablamos de integrar una ecuación diferencial, cuando deberíamos decir resolver la ecuación. Esto se debe a que en muchas ocasiones la resolución de las ecuaciones diferenciales se reduce a hacer integrales. Este uso (abuso) del lenguaje está tan extendido que no nos esforzaremos en evitarlo.

de estos teoremas a determinados problemas en los que determinadas magnitudes “se conservan” durante el movimiento. Estos teoremas se expresarán a partir de nuevas cantidades dinámicas tales como cantidad de movimiento, impulso, momento cinético, momento de una fuerza, trabajo y energía cinética, definidas a partir de los conceptos fundamentales que aparecen en (4.1).

4.2 Teorema de la cantidad de movimiento

Consideremos un punto material de masa m en movimiento respecto a un sistema de referencia inercial. La segunda ley de Newton establece que

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (4.2)$$

Multiplicando ambos miembros de (4.2) por un intervalo de tiempo infinitesimal durante el cual actúa \vec{F} , tenemos

$$\vec{F}dt = m\vec{a}dt = m d\vec{v} = d(m\vec{v}), \quad (4.3)$$

donde hemos tenido en cuenta que la masa del punto permanece constante durante el movimiento. Integrando (4.3) en el intervalo (t_1, t_2) , se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = m\vec{v}(t_2) - m\vec{v}(t_1). \quad (4.4)$$

4.2.1 Cantidad de movimiento

Se denomina *cantidad de movimiento* de la partícula al vector²

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (4.5)$$

En el sistema internacional, la unidad de medida de la cantidad de movimiento es el $kg.m/s$.

4.2.2 Impulso de una fuerza

Se denomina *impulso elemental* $d\vec{I}$ de una fuerza \vec{F} en un intervalo de tiempo dt , al vector que resulta de multiplicar \vec{F} por dt , es decir

$$d\vec{I} = \vec{F}dt. \quad (4.6)$$

Por otro lado, se denomina *impulso* de la fuerza \vec{F} en un intervalo (t_1, t_2) a la cantidad

$$\vec{I}(t_1 \rightarrow t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt. \quad (4.7)$$

²También se le denomina *momento lineal*.

En el sistema internacional el impulso de una fuerza se mide en $N.s$.

4.2.3 Teorema

“El impulso de la fuerza resultante que actúa sobre un punto material de masa m en un intervalo (t_1, t_2) , es igual al incremento de su cantidad de movimiento entre ambos instantes”.

Demostración:

Sustituyendo (4.5) y (4.7) en (4.4) se tiene

$$\vec{I}(t_1 \rightarrow t_2) = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1), \quad (4.8)$$

con lo que el teorema queda demostrado.

Nótese que en general no se conoce la dependencia total de la fuerza resultante con el tiempo, $\vec{F}(t)$, sino que ésta depende también de la posición y la velocidad de la partícula. En este caso, para poder evaluar el impulso necesitaríamos conocer $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$, las cuales son en principio incógnitas de nuestro problema. Por tanto, en estos casos no se puede obtener información acerca del movimiento a partir del teorema de la cantidad de movimiento. Por otro lado, cuando la dependencia total de \vec{F} con el tiempo es conocida, la aplicación de (4.8) permite obtener la velocidad de la partícula y su posición a partir de las condiciones iniciales.

También podemos obtener información de (4.8) cuando una o más componentes de la fuerza resultante son nulas:

1. Supongamos que $\vec{F} = \vec{0}$. Entonces, \vec{p} es una constante en el transcurso del tiempo. Como $\vec{p} = m\vec{v}$ y la masa no varía, entonces

$$\vec{v} = \vec{v}_0.$$

Por tanto,

“si $\vec{F} = \vec{0}$ el movimiento es rectilíneo uniforme”.

2. Si, por ejemplo $F_x = 0$, entonces la cantidad de movimiento p_x según esta dirección permanece constante, es decir $v_x = v_{x_0}$. Este resultado es general para cualquier dirección fija \vec{u} según la cual la resultante \vec{F} no tenga componente. Es decir,

“Si $\vec{F} \cdot \vec{u} = 0$, entonces $v_{\vec{u}} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ es constante”.

Demostración:

$$\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{u} = \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} \equiv cte.$$

3. Veamos lo que ocurre cuando \vec{F} sólo tiene componente según una dirección. Por ejemplo, si $\vec{F} = F_x \vec{i}$, entonces

$$v_y = C_1 \Rightarrow y = C_1 t + y_0,$$

$$v_z = C_2 \Rightarrow z = C_2 t + z_0.$$

Despejando t de la primera relación y sustituyendo en la segunda, tenemos

$$C_1 z - C_2 y = C_1 z_0 - C_2 y_0. \quad (4.9)$$

Es decir, la trayectoria se sitúa en un plano perpendicular al plano $x = 0$, y cuya ecuación viene dada por las condiciones iniciales a partir de (4.9).

4.3 Teorema del Momento cinético

4.3.1 Momento cinético respecto a un punto

Consideremos una partícula P de masa m cuyo movimiento está referido a un observador inercial $O_1 X_1 Y_1 Z_1$, y un punto móvil “ O ”. Se denomina ³ *momento cinético* del punto material respecto a O , al vector aplicado en O que resulta al multiplicar vectorialmente el radio vector de P respecto a O , por la cantidad de movimiento del punto en su movimiento referido a “1”. Es decir ⁴,

$$\vec{L}_O = \vec{OP} \wedge \vec{p}, \quad (4.10)$$

siendo $\vec{p} = m\vec{v}_1^P$.

En el sistema internacional el momento cinético se mide en $kg.m^2/s$.

4.3.2 Teorema

“*La derivada del momento cinético de P respecto a un punto O vista por un observador inercial es igual al momento de la resultante \vec{F} respecto a O , más el producto vectorial de la cantidad de movimiento de la partícula por la velocidad de O ”.*

Demostración:

Derivando (4.10), tenemos

³Al momento cinético también se le conoce como *momento angular*.

⁴En general, dado un vector \vec{V} aplicado en un punto Q , se denomina momento de \vec{V} respecto a un punto A , al vector aplicado en A

$$\vec{M}_A = \vec{AQ} \wedge \vec{V}.$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{OP}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{OP} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (4.11)$$

Analícemos por separado cada una de los sumandos del segundo miembro de (4.11):

- Al ser $\vec{OP} = \vec{O_1P} - \vec{O_1O}$, entonces, derivando respecto al tiempo vemos que

$$\frac{d\vec{OP}}{dt} = \vec{v}_1^P - \vec{v}_1^O,$$

por tanto,

$$\frac{d\vec{OP}}{dt} \wedge \vec{p} = (\vec{v}_1^P - \vec{v}_1^O) \wedge \vec{p} = \vec{p} \wedge \vec{v}_1^O. \quad (4.12)$$

- Por otro lado,

$$\vec{OP} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{OP} \wedge \vec{F} = M_O(\vec{F}), \quad (4.13)$$

siendo $\vec{M}_O(\vec{F})$ el momento en O de \vec{F} .

Sustituyendo (4.12) y (4.13) en (4.11), queda finalmente

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{p} \wedge \vec{v}_1^O, \quad (4.14)$$

con lo cual el teorema queda demostrado.

La expresión del teorema del momento cinético en el caso de que O sea un punto fijo respecto a los ejes “1” es

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}). \quad (4.15)$$

4.4 Teorema de la energía cinética

Consideremos el desplazamiento infinitesimal real $d\vec{r}$ del punto material, efectuado en el lapso infinitesimal de tiempo dt . Si multiplicamos escalarmente la segunda ley de Newton por $d\vec{r}$, tenemos

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\vec{v} \cdot d\vec{v}.$$

Teniendo en cuenta que

$$m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right),$$

queda finalmente

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right). \quad (4.16)$$

Si integramos (4.16) entre dos puntos A y B de la trayectoria, se tiene

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2. \quad (4.17)$$

4.4.1 Energía cinética

Se define la *energía cinética* de un punto material como la mitad del producto de su masa por el cuadrado de su velocidad:

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \quad (4.18)$$

4.4.2 Trabajo

Se denomina *trabajo elemental*⁵ realizado por \vec{F} en el desplazamiento $d\vec{r}$, a la cantidad

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (4.19)$$

Si consideramos el desplazamiento finito de P entre dos puntos A y B de la trayectoria, se denomina *trabajo total* realizado por \vec{F} entre estos dos puntos, a la cantidad

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (4.20)$$

Si \vec{F} es la resultante de varias fuerzas \vec{F}_i que actúan sobre el punto, es decir $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$, se tiene

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i \delta W_i \Rightarrow W = \sum_i W_i. \quad (4.21)$$

es decir, el trabajo realizado por \vec{F} es igual a la suma de los trabajos realizados por cada una de las fuerzas \vec{F}_i .

En el sistema internacional la unidad de medida del trabajo es el Julio (J), siendo $1 J = 1 N \cdot m$.

⁵Escribimos δW en lugar de dW porque el trabajo elemental, aunque es una cantidad infinitesimal, no es en general la diferencial exacta de una función escalar de las coordenadas.

En las aplicaciones prácticas de la mecánica es importante conocer la “rapidez” con la que se efectúa el trabajo. Se define la *potencia instantánea* como

$$P = \frac{\delta W}{dt}. \quad (4.22)$$

Teniendo en cuenta la definición de trabajo elemental dada por (4.19), y que $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, tenemos

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (4.23)$$

En el sistema internacional la unidad de potencia es el Watio (W), siendo $1 W = 1 J/s$.

4.4.3 Teorema

“El incremento en la energía cinética de una partícula entre dos puntos A y B de su trayectoria es igual al trabajo realizado por la resultante \vec{F} entre A y B ”.

Demostración:

Sólo tenemos que tener en cuenta las definiciones (4.18), (4.19) y (4.20) en los resultados (4.16) y (4.17). Tenemos

$$\delta W = dT \Rightarrow W_{AB} = \Delta T \equiv T_B - T_A, \quad (4.24)$$

con lo que el teorema queda demostrado.

En principio, para poder aplicar el teorema de la energía a un caso concreto, necesitaríamos conocer la dependencia de la fuerza con la posición de la partícula, así como la trayectoria descrita por el punto, para poder evaluar (4.20).

4.4.4 Fuerzas conservativas

Supongamos el caso de una fuerza que depende tan sólo de la posición, es decir $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$. Se dice que \vec{F} es *conservativa* cuando existe una función escalar de las coordenadas $E_P(x, y, z)$, de manera que el trabajo elemental realizado por \vec{F} se puede expresar como

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_P. \quad (4.25)$$

E_P se denomina *energía potencial*.

En estos casos, nótese que el trabajo realizado por \vec{F} entre dos puntos no depende de la trayectoria que los une sino del valor que toma la energía potencial en ambos puntos:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B dE_P = E_{P,A} - E_{P,B}. \quad (4.26)$$

Para ver la relación existente entre \vec{F} y E_P , tendremos en cuenta que

$$dE_P = \frac{\partial E_P}{\partial x} dx + \frac{\partial E_P}{\partial y} dy + \frac{\partial E_P}{\partial z} dz = \vec{\nabla} E_P \cdot d\vec{r}, \quad (4.27)$$

donde $\vec{\nabla} E_P$ se denomina *gradiente* de la energía potencial:

$$\vec{\nabla} E_P = \frac{\partial E_P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z} \vec{k}. \quad (4.28)$$

Sustituyendo (4.27) en (4.25) vemos que

$$(\vec{F} + \vec{\nabla} E_P) \cdot d\vec{r} = 0, \quad \forall d\vec{r} \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} E_P. \quad (4.29)$$

Ejemplos

Veremos a continuación dos ejemplos conocidos de fuerzas conservativas, así como la energía potencial asociada a las mismas.

1. Fuerza de gravedad homogénea. Para una partícula que se mueve cerca de la superficie de la Tierra, la fuerza con la que se ve atraída se puede aproximar por

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{j}, \quad (4.30)$$

siendo g el valor de la gravedad en la superficie terrestre ⁶.

Supongamos que un punto M se desplaza por la acción de la gravedad desde un punto P_0 hasta otro punto P . El trabajo realizado por el peso es

$$W = \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{r} = -mg \int_{y_0}^y dy' = mg(y_0 - y).$$

Vemos fácilmente que, al ser $\delta W = -d(mgy)$, la energía potencial es

$$E_P = mgy + C. \quad (4.31)$$

Nótese que la energía potencial está determinada salvo una constante arbitraria, lo cual no es importante dado que el trabajo viene dado por la diferencia de energía potencial entre dos puntos. Por tanto, podemos tomar $C = 0$, de manera que $E_P = mgy$.

⁶Aquí hemos considerado unos ejes coordenados en los que el eje OY tiene la dirección y el sentido de la vertical ascendente.

2. Fuerza elástica.

Sea una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza elástica

$$\vec{F}_e = -k\vec{r}, \quad (4.32)$$

siendo \vec{r} el radio vector de la partícula en relación al punto O , y k una constante positiva⁷. El trabajo elemental realizado por \vec{F}_e entre \vec{r} y $\vec{r} + d\vec{r}$ es

$$\delta W = -k\vec{r} \cdot d\vec{r} = -kd(r^2/2) \quad (4.33)$$

Cuando la partícula pasa de \vec{r}_0 a \vec{r}_1 , el trabajo total es

$$W = -k \int_{r_0}^{r_1} d(r^2/2) = \frac{1}{2}kr_0^2 - \frac{1}{2}kr_1^2.$$

Nótese que, al ser $\delta W = -d(kr^2/2)$, entonces

$$E_P = \frac{1}{2}kr^2. \quad (4.34)$$

4.4.5 Movimiento bajo fuerzas conservativas

Supongamos que las fuerzas que actúan sobre el punto son tales que el trabajo realizado por su resultante se puede expresar a partir de (4.26). En tal caso, el teorema de la energía (4.24) quedaría

$$E_m(A) = E_m(B), \quad (4.35)$$

donde $E_m = E_P + \frac{1}{2}mv^2$ se denomina *energía mecánica*. Es decir,

“Cuando el trabajo total realizado sobre una partícula entre dos puntos de su trayectoria se puede expresar a partir de la variación de una función escalar de las coordenadas (energía potencial), la energía mecánica permanece constante en el transcurso del tiempo.”

⁷Este es el tipo de fuerza que ejerce un resorte ideal. La partícula estaría ligada a un extremo del resorte, siendo el otro el punto O . En este caso, la constante k se denomina constante elástica del resorte.

Capítulo 5

SISTEMAS DE PARTÍCULAS

5.1 Introducción

En el estudio de la dinámica del punto, se considera que la influencia que el resto del universo ejerce sobre una partícula está representada por un vector igual a la resultante de todas las acciones a las que está sometida. La segunda ley de Newton permite obtener el movimiento del punto respecto a un sistema inercial, a partir de las fuerzas que actúan sobre el mismo. Por otro lado, en el tema anterior vimos tres teoremas que se deducen de la segunda ley de Newton, y que permiten obtener en muchos casos información del movimiento a partir de las propiedades de las fuerzas.

En este capítulo vamos a describir el comportamiento dinámico de un *sistema de partículas*, es decir, un conjunto de puntos materiales cuyo movimiento vendrá dado por sus interacciones con otros cuerpos no pertenecientes al sistema, y por las existentes entre ellos. La elección de las partículas que constituyen un sistema es arbitraria; cualquier conjunto de puntos materiales puede ser objeto de estudio como un sistema.

En principio, para abordar tal estudio deberíamos considerar las fuerzas a que están sometidas todas las partículas que componen el sistema, con lo que obtendríamos así el movimiento de cada una de ellas. No obstante, tal objetivo resulta prácticamente imposible cuando el número de partículas es grande, debido a la elevada complejidad que tiene el problema así planteado. Para obtener información acerca de la dinámica del sistema sin tener que centrarnos en el movimiento de cada una de sus partículas introduciremos el concepto de centro de masas, lo que resultará tremendamente útil.

5.2 Teorema de la cantidad de movimiento

Sea un sistema constituido por N puntos materiales P_i ($i = 1, 2, \dots, N$), cada uno de ellos de masa m_i . A los vectores posición, velocidad y aceleración de la partícula i respecto a un sistema de referencia inercial $O_1X_1Y_1Z_1$ los denotaremos respectiva-

mente por $O_1 P_i \equiv \vec{r}_i, \vec{v}_i$ y \vec{a}_i .

5.2.1 Cantidad de movimiento de un sistema

Se denomina *cantidad de movimiento* del sistema al vector libre igual a la suma de las cantidades de movimiento de cada una de las partículas:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i. \quad (5.1)$$

5.2.2 Teorema

“La derivada temporal¹ de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas es igual a la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.”

Demostración:

Consideremos un punto material P_i . Sobre el mismo actúan fuerzas exteriores al sistema, y fuerzas interiores debido a su interacción con el resto de las partículas. De esta forma, tendremos en cuenta:

1. Una fuerza \vec{F}_i^{ext} , resultante de todas las acciones externas al sistema que actúan sobre la partícula P_i .
2. Al existir una interacción entre P_i y P_j , $j \neq i$, representada por \vec{F}_{ij} (fuerza que sobre la partícula i ejerce la partícula j), sobre P_i actuará también una fuerza igual a la resultante de todas acciones internas $\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$.

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento de P_i , tenemos

$$\vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = m_i \vec{a}_i. \quad (5.2)$$

Si sumamos (5.2) para todas las partículas del sistema, queda

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i. \quad (5.3)$$

Como las fuerzas internas verifican el principio de acción y reacción, el segundo sumando de (5.3) se anula, dado que a cada término \vec{F}_{kl} le corresponde otro $\vec{F}_{lk} = -\vec{F}_{kl}$, de forma que todos los sumandos que aparecen en este término de (5.3) se cancelan dos a dos. Por tanto

$$\vec{F}^{ext} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i, \quad (5.4)$$

¹Contemplada por un observador inercial.

siendo $\vec{F}^{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}$ la resultante de todas las fuerzas externas al sistema.

Por otro lado, si derivamos respecto al tiempo la cantidad de movimiento del sistema dada por (5.1), vemos que

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i. \quad (5.5)$$

Sustituyendo (5.5) en (5.4), queda

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}, \quad (5.6)$$

con lo cual el teorema queda demostrado.

5.3 Teoremas del centro de masas

5.3.1 Masa del sistema

Por definición, la *masa* de un sistema es la suma de las masas de cada una de las partículas que lo componen. Designándola por M , tenemos

$$M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (5.7)$$

5.3.2 Centro de masas

Se denomina *centro de masas* de un sistema de partículas, al punto G definido por el vector de posición

$$\vec{O}_1 G \equiv \vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}. \quad (5.8)$$

Derivando respecto al tiempo (5.8), la velocidad y aceleración del centro de masas vienen dadas por

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{M} \quad (5.9)$$

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i}{M} \quad (5.10)$$

5.3.3 Teorema 1

“La cantidad de movimiento de un sistema es igual a la de un punto que ocupara en todo instante la posición del centro de masas y en el que estuviera colocada toda la masa del sistema.”

Demostración:

Si tenemos en cuenta la expresión (5.9) de la velocidad del centro de masas, vemos que

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_G. \quad (5.11)$$

5.3.4 Teorema 2 (Teorema del centro de masas)

“La resultante de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de puntos materiales es igual al producto de la masa del sistema por la aceleración del centro de masas”.

Demostración:

Es inmediata a partir de (5.11) y (5.6). Derivando la primera respecto al tiempo, tenemos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \vec{a}_G. \quad (5.12)$$

Sustituyendo en (5.6) queda

$$\vec{F}^{ext} = M \vec{a}_G. \quad (5.13)$$

5.3.5 Corolarios

- “Cuando la resultante de las fuerzas exteriores al sistema es nula, la cantidad de movimiento (y velocidad del centro de masas) del sistema permanece constante en el transcurso del tiempo”.

Demostración:

En el caso de que $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ entonces, utilizando (5.6) y (5.13), se tiene

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \implies \vec{P} = c\vec{e} \implies \vec{v}_G = c\vec{e}. \quad (5.14)$$

- “Cuando la componente de \vec{F}_{ext} según una dirección fija \vec{u} del espacio sea nula, la proyección según \vec{u} de la cantidad de movimiento del sistema (velocidad del centro de masas), permanece constante”.

Demostración:

Si $\vec{F}_{ext} \cdot \vec{u} = 0$, multiplicando escalarmente (5.6) y (5.13) por \vec{u} , tenemos

$$\vec{F}_{ext} \cdot \vec{u} = 0 = M \frac{d\vec{v}_G}{dt} \cdot \vec{u} = \frac{dP_{\vec{u}}}{dt}, \quad (5.15)$$

siendo $P_{\vec{u}} = M\vec{v}_G \cdot \vec{u}$ la proyección de la cantidad de movimiento en la dirección \vec{u} .

5.4 Teorema del Momento cinético

5.4.1 Momento cinético respecto a un punto

Consideremos la situación que se muestra en la figura. Un sistema de partículas cuyo movimiento está referido a un sistema inercial, y un punto “ O ”. Por definición, el *momento cinético* del sistema respecto a O , es la suma extendida a todas las partículas sistema de los momentos cinéticos de cada partícula respecto a O , es decir

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^N \vec{OP}_i \wedge \vec{p}_i. \quad (5.16)$$

5.4.2 Teorema

“La derivada temporal² del momento cinético de un sistema respecto a un punto O es igual al momento resultante de las fuerzas externas respecto a O , más el producto vectorial de la cantidad de movimiento del sistema por la velocidad de este punto.”

Demostración:

Derivando (5.16), tenemos

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{OP}_i}{dt} \wedge \vec{p}_i + \sum_{i=1}^N \vec{OP}_i \wedge \frac{d\vec{p}_i}{dt}. \quad (5.17)$$

Analicemos por separado cada una de los sumandos del segundo miembro de (5.17):

- Como $\vec{OP}_i = \vec{O}_1P_i - \vec{O}_1O$ entonces

$$\frac{d\vec{OP}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_1^O. \quad (5.18)$$

Por tanto

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{OP}_i}{dt} \wedge \vec{p}_i = \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_1^O) \wedge \vec{p}_i = \vec{P} \wedge \vec{v}_1^O. \quad (5.19)$$

²Contemplada por un observador inercial.

- Por otro lado,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \vec{OP}_i \wedge \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i = \\ & = \sum_{i=1}^N \vec{OP}_i \wedge \left(\vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_{ij}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

En la última suma, a cada término $\vec{OP}_k \wedge \vec{F}_{kl}$ le corresponde otro $\vec{OP}_l \wedge \vec{F}_{lk}$. Si tenemos en cuenta que la fuerza de interacción entre dos puntos está dirigida según la línea que los une, entonces

$$\vec{OP}_k \wedge \vec{F}_{kl} + \vec{OP}_l \wedge \vec{F}_{lk} = (\vec{OP}_k - \vec{OP}_l) \wedge \vec{F}_{kl} = \vec{P}_l \vec{P}_k \wedge \vec{F}_{kl} = \vec{0},$$

dado que \vec{F}_{kl} y $\vec{P}_k \vec{P}_l$ son paralelos.

De esta forma, sustituyendo (5.20) y (5.19) en (5.17), se tiene finalmente

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{ext} + \vec{P} \wedge \vec{v}_1^O, \quad (5.21)$$

siendo $\vec{M}_O^{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i^{ext}$ el momento resultante de las fuerzas exteriores al sistema respecto al punto O .

En el caso de que el punto en que tomamos el momento cinético sea fijo o coincida con el centro de masas, el teorema del momento cinético adopta una expresión más sencilla al anularse el segundo sumando del miembro derecho de (5.21):

1. Si O es un punto fijo, entonces

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{ext}. \quad (5.22)$$

“La derivada temporal del momento cinético de un sistema de partículas referido a un punto fijo O , es igual al momento resultante de las acciones externas en O .”

2. Por otro lado, si $O \equiv G$, al ser $\vec{P} = M\vec{v}_G$ entonces $M\vec{v}_G \wedge \vec{v}_G = \vec{0}$. Por tanto

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{ext}. \quad (5.23)$$

“La derivada temporal del momento cinético de un sistema de partículas respecto al centro de masas es igual al momento resultante de las acciones externas en G ”.

5.5 Teorema de la energía

5.5.1 Energía cinética de un sistema

Por definición, la *energía cinética* de un sistema de partículas es la suma de las energías cinéticas de cada una de las partículas que lo componen:

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2. \quad (5.24)$$

5.5.2 Trabajo sobre un sistema de partículas

Consideremos un desplazamiento infinitesimal del sistema $[d\vec{r}_i]$, ($i = 1, \dots, N$), caracterizado por el desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}_i$ de cada una de sus partículas. El *trabajo realizado sobre el sistema* en $[d\vec{r}_i]$, es la suma de los trabajos realizados sobre cada una de las partículas:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \delta W_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i. \quad (5.25)$$

Por otro lado, como $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$, sustituyendo en (5.25) se tiene

$$\delta W = \delta W_{ext} + \delta W_{int}, \quad (5.26)$$

siendo

$$\delta W_{ext} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}_i, \quad (5.27)$$

el trabajo elemental realizado sobre el sistema por las fuerzas externas, y

$$\delta W_{int} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i, \quad (5.28)$$

el trabajo elemental realizado por las fuerzas internas.

Nótese que δW_{int} en general no se anula, dado que, si bien al término $\vec{F}_{kl} \cdot d\vec{r}_k$ le corresponde otro $\vec{F}_{lk} \cdot d\vec{r}_l = -\vec{F}_{kl} \cdot d\vec{r}_l$, ambos términos no se cancelan:

$$\vec{F}_{kl} \cdot (d\vec{r}_k - d\vec{r}_l) \neq 0.$$

Si consideramos un desplazamiento finito del sistema $[\vec{r}_i]_A \rightarrow [\vec{r}_i]_B$, entonces el trabajo realizado sobre el sistema en tal desplazamiento se define como “la suma” de los infinitos trabajos elementales (5.26) entre las dos posiciones A y B , es decir, la integral

$$W_{AB} \equiv \int_A^B \delta W^{ext} + \int_A^B \delta W^{int} \equiv W_{AB}^{ext} + W_{AB}^{int}. \quad (5.29)$$

5.5.3 Teorema de la energía

“El incremento en la energía cinética de un sistema es igual al trabajo realizado por las fuerzas externas más el realizado por las fuerzas internas”.

Demostración:

Por el teorema de la energía aplicado a una partícula, sabemos que

$$dT_i = \delta W_i. \quad (5.30)$$

Sumando para todas las partículas y teniendo en cuenta las definiciones (5.24) y (5.25), tenemos

$$\int_A^B dT = \int_A^B \delta W \Rightarrow \Delta T = W_{AB} = W_{AB}^{ext} + W_{AB}^{int}. \quad (5.31)$$

5.5.4 Conservación de la energía en un sistema

Vamos a profundizar un poco más en el teorema de la energía. Para ello, tendremos en cuenta que tanto las fuerzas externas como las internas pueden clasificarse en conservativas y no conservativas.

El trabajo de las fuerzas conservativas externas se puede expresar a partir de la variación de una *energía potencial externa* asociada al sistema:

$$\begin{aligned} \delta W_c^{ext} &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext,c} \cdot d\vec{r}_i = - \sum_{i=1}^N dE_{P,i}^{ext} \equiv -dE_P^{ext} \\ \Rightarrow W_c^{ext} &= -\Delta E_P^{ext}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Por otro lado, el trabajo de las fuerzas internas conservativas puede expresarse también a partir de la variación de una *energía potencial interna*:

$$\begin{aligned} \delta W_c^{int} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^c \cdot d\vec{r}_i = - \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} dE_{P,ij}^{int} \equiv -dE_P^{int} \\ \Rightarrow W_c^{int} &= -\Delta E_P^{int}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

En (5.32) y (5.33) hemos prescindido, para simplificar la notación, de expresar los estados A y B entre los que evoluciona el sistema.

Teniendo en cuenta en (5.31) las consideraciones anteriores, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta T &= W_{nc}^{ext} - \Delta E_P^{ext} + W_{nc}^{int} - \Delta E_P^{int} \\ \Rightarrow \Delta(T + E_P^{ext} + E_P^{int}) &= W_{nc}^{ext} + W_{nc}^{int}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde W_{nc}^{ext} y W_{nc}^{int} son los trabajos realizados por las fuerzas no conservativas.

En el caso de que el **sistema esté aislado** y las **fuerzas internas sean conservativas** tenemos el siguiente

Teorema: “En un sistema aislado en el que todas las interacciones internas son conservativas, la suma de las energías cinética y potencial del sistema permanece constante a lo largo del tiempo.”

Demostración:

Sólo tenemos que tener en cuenta en (5.34) que $W^{ext} = 0$ y que $W_{nc}^{int} = 0$. De esta forma,

$$\Delta(T + E_P^{int}) = 0 \Rightarrow \mathcal{E} \equiv T + E_P^{int} = cte. \quad (5.35)$$

La suma de las energías cinética y potencial interna, a la que hemos denotado por \mathcal{E} , se denomina *energía propia*.

Cuando el sistema no esté aislado pero todas las fuerzas sean conservativas, se tiene:

Teorema: “En un sistema de partículas en el que todas las fuerzas que actúan son conservativas, la suma de las energías cinética, potencial externa y potencial interna, se conserva durante el movimiento.”

Demostración:

Sólo tenemos que tener en cuenta que el miembro derecho de la ecuación (5.34) se anula en este caso. Por tanto,

$$\Delta(T + E_P^{ext} + E_P^{int}) = 0 \Rightarrow E_m \equiv T + E_P^{ext} + E_P^{int} = cte. \quad (5.36)$$

A la cantidad E_m , suma de las energías propia y potencial externa se la denomina *energía mecánica total* del sistema.

5.6 Cuestiones y problemas de Mecánica

Cuestiones

1. Un punto describe una trayectoria circular, siendo constante el módulo de su velocidad. Analiza la veracidad de las afirmaciones siguientes:
 - La aceleración es cero.
 - El módulo de la aceleración es cero.
2. Una partícula se mueve sobre cierta trayectoria de forma que su aceleración y velocidad forman un ángulo obtuso constante, siendo también constante el módulo de la aceleración. Discute la veracidad de las siguientes afirmaciones:
 - El módulo de la aceleración tangencial es constante y el de la aceleración normal disminuye con el tiempo.
 - La celeridad depende linealmente del tiempo y el módulo de la aceleración normal es constante.
 - La celeridad aumenta linealmente con el tiempo y el radio de curvatura decrece.
3. Discute la veracidad de la afirmación siguiente: *la variación de la energía mecánica de un sistema de partículas es igual al trabajo realizado por las fuerzas conservativas.*
4. Dos partículas aisladas colisionan, de forma que la energía cinética del sistema formado por ambas partículas después de la colisión es 100 veces la energía cinética antes de la colisión. ¿Cuánto cambia la celeridad del centro de masas del sistema después de la colisión?
5. A Pedrito le han regalado el día de Reyes tres bolas de masas m_1 , $m_2 = 2m_1$, y $m_3 = 3m_1$, las cuales se encuentran unidas entre sí por muelles ideales. El regalo no le gusta, de forma que lo lanza desde el balcón de su casa. Suponiendo despreciable el rozamiento del aire, ¿cuál es la aceleración con la que cae el centro de masas del sistema constituido por las bolas y los muelles?
6. Dos pequeñas bolas idénticas de plastilina se lanzan horizontalmente y con la misma celeridad desde lo alto de sendos edificios de la misma altura. Antes de llegar al suelo chocan y se quedan pegadas. La energía mecánica del sistema, ¿aumenta, disminuye, o no cambia en la colisión? Razone la respuesta.
7. Discute la veracidad de la afirmación siguiente: *En un sistema de partículas en el que no actúan fuerzas externas la cantidad de movimiento de cada una de las partículas es constante.*

8. A y B son dos luchadores de sumo. En el sumo los luchadores se colocan inicialmente en el centro de un círculo dibujado en el suelo. Al dar una señal, se manipulan y empujan. El que primero se sale del círculo pierde. A y B practican una modalidad ártica (sobre hielo, cuyo coeficiente de rozamiento se supone nulo). Si A pesa el doble que B , ¿quién crees que ganará el combate? Razona la respuesta.
9. En un sistema formado por dos partículas, ambas están sometidas exclusivamente a sendas fuerzas externas idénticas y constantes. Discute la veracidad de las afirmaciones siguientes:
 - El centro de masas describe una línea recta.
 - La celeridad del centro de masas siempre es un polinomio de primer grado en el tiempo.
 - La energía cinética del sistema siempre es un polinomio de segundo grado en el tiempo.
10. Un caballo tira de un carro con una fuerza F . Por el principio de acción y reacción el carro tira del caballo con la misma fuerza F . Y sin embargo, el conjunto se mueve. ¿Porqué?
11. Un sistema de partículas se mueve de forma que su centro de masas permanece en reposo respecto a un sistema de referencia inercial. Discute la veracidad de las afirmaciones siguientes:
 - La energía cinética del sistema es nula.
 - No actúan fuerzas externas sobre las partículas del sistema.
 - El momento cinético del sistema es una constante de movimiento.
12. Una partícula se mueve bajo la acción del campo gravitatorio terrestre y de la resistencia del medio (fuerza de sentido contrario al de la velocidad de la partícula) de un punto A a otro punto B de alturas h_A y h_B , siendo $h_A > h_B$. El incremento de energía cinética que experimenta la partícula es, ¿positivo, negativo, o nulo?
13. Un sistema de dos partículas se mueve en el plano OXY , de forma que sobre cada una de ellas actúa una fuerza elástica dirigida hacia el punto O (no hay gravedad). ¿Qué magnitudes dinámicas se conservan en el movimiento del sistema?
14. Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de una fuerza $\vec{F} = \vec{v} \wedge \vec{A}$, siendo \vec{v} la velocidad y \vec{A} un vector constante no nulo. Inicialmente la celeridad de la partícula es v_0 . Después de un tiempo T , ¿cuánto vale la celeridad?

15. Analiza la veracidad de la afirmación siguiente: *Un hombre de masa 80 Kg, en reposo sobre el suelo horizontal (perpendicular al campo gravitatorio), empuja una pared vertical fija con una fuerza horizontal de 90 N, siendo el coeficiente de rozamiento estático entre el hombre y el suelo es 0.1.*
16. Una anilla da vueltas en el interior de una circunferencia horizontal fija, en presencia del campo gravitatorio terrestre (no hay rozamiento). Analiza la veracidad de la afirmación siguiente: *Las fuerzas que actúan sobre la anilla son el peso (vertical), la reacción de la circunferencia, y la fuerza centrífuga debida al movimiento circular de la anilla.*
17. Una pequeña masa está colgada del techo mediante un hilo. Otra masa idéntica está unida a la anterior mediante un muelle. El sistema se encuentra inicialmente en equilibrio. Súbitamente se corta el hilo. ¿Es correcta la afirmación siguiente?: *La aceleración de cada una de las masas inmediatamente después de cortar el hilo es igual a la aceleración de la gravedad.*
18. Dos pequeñas bolas se mueven en una mesa horizontal con rozamiento. En un instante dado chocan entre sí. Analiza la veracidad de la afirmación siguiente: *La cantidad de movimiento del sistema constituido por las dos bolas no se conserva en el momento de la colisión, dado que la resultante de las fuerzas externas, la fuerza de rozamiento, no es nula.*
19. ¿Puede un cuerpo estar en equilibrio y en movimiento? ¿Qué tipo de movimiento? ¿Puede un cuerpo estar en reposo pero no en equilibrio?
20. Se deja caer un objeto en presencia del campo gravitatorio terrestre y de la resistencia del aire, fuerza de sentido contrario al de la velocidad, y cuyo módulo se puede considerar en muchos casos proporcional a la celeridad. Explicar, utilizando la segunda ley de Newton, el hecho de que el objeto adquiera una velocidad constante en su caída.

Problemas

1. Un punto se mueve en el plano OXY , siendo $x(t) = 2 + t^2/2$, e $y(t) = t^2 - 1$, donde x e y están expresadas en metros y t en segundos. Determinar la ecuación de la trayectoria $y = f(x)$, así como la celeridad y el módulo de la aceleración.

Respuesta: (a) $y = 2x - 5$; (b) $v = \sqrt{5}t \text{ m/s}$; (c) $a = \sqrt{5} \text{ m/s}^2$.

2. Una partícula describe la trayectoria dada por las ecuaciones $x = t$, $y = t^2$, donde las unidades están dadas en el sistema internacional. Cuando la partícula pasa por la posición $(1, 1)$ determinar los módulos de la velocidad y la aceleración, así como las componentes intrínsecas de la aceleración y el radio de curvatura.

Respuesta: $v \approx 2.24 m/s$; $a = 2 m/s^2$; $a_t \approx 1.79 m/s^2$; $a_n \approx 0.89 m/s^2$; $R \approx 5.59 m$.

3. El vector de posición de una partícula P es $\vec{r} = 3t\vec{i} - t^2\vec{j} + 8\vec{k}$ en unidades SI. Hallar: a) la celeridad y la velocidad de la partícula a los 2 minutos de iniciado el movimiento; b) las componentes intrínsecas de la aceleración y el radio de curvatura a los 2 seg.

Respuesta: $v \approx 240 m/s$; $a_t = 1.6 m/s^2$; $a_n = 1.2 m/s^2$; $R \approx 20.8 m$.

4. Se lanza una pelota con velocidad inicial \vec{v} de componentes $v_x = 20 m/s$ y $v_y = 16 m/s$. Se pide: a) el tiempo que está subiendo; b) la altura que alcanza; c) la distancia a que se debe encontrar otro jugador de la misma talla para devolver la pelota; d) radio de curvatura de la trayectoria en su punto mas alto. Tómese $g = 9.8 m/s^2$.

Respuesta: (a) $t = 1.6 s$; (b) $y = 13 m$; (c) $x = 65 m$; (d) $\rho_c = 40.8 m$.

5. La aceleración de un punto que se mueve en el eje OX viene dada por la expresión $a_x = 5 - t$, donde x viene dado en metros y t en segundos. Determinar las expresiones de $v_x(t)$ y $x(t)$, sabiendo que para $t = 0 s$ el punto se encuentra en reposo en el origen.

Respuesta: $v_x(t) = 5t - t^2/2$; $x(t) = 5t^2/2 - t^3/6$.

6. La posición de una partícula desde un sistema de referencia S viene dada por $\vec{r} = (6t^2 - 3t)\vec{i} + 3t^2\vec{j} - 3\vec{k} m$. Desde otro sistema de referencia S' , el cual se mueve respecto a S a velocidad constante, la posición de la partícula es $\vec{r}' = (6t^2 + 4t)\vec{i} + 3t^2\vec{j} - 3\vec{k} m$. ¿Con qué velocidad se mueve S' respecto a S ? ¿Cuál es la aceleración de la partícula respecto a S y S' ?

Respuesta: $-7\vec{i} m/s$; $\vec{a} = \vec{a}' = 12\vec{i} + 6\vec{j} m/s^2$.

7. Un tren pasa por una estación moviéndose con una velocidad de $20 m/s$. Un pasajero del tren observa el movimiento de una bola dentro del vagón, con una celeridad de $5 m/s$, dirigida: a) en la dirección y sentido del movimiento del tren; b) en la dirección del movimiento del tren, pero en sentido opuesto; c) perpendicularmente a la dirección de movimiento del tren y con sentido hacia la estación.

Calcula en cada caso la celeridad de la bola para un observador que se encuentra en la estación.

Respuesta: (a) $25 m/s$; (b) $15 m/s$; (c) $20.6 m/s$.

8. Un hombre de masa $90 kg$ se encuentra dentro de un ascensor y en reposo respecto al mismo. Determinar la fuerza que ejerce el piso sobre el hombre cuando: (a) El ascensor asciende con velocidad uniforme; (b) El ascensor baja con velocidad uniforme; (c) El ascensor acelera hacia arriba a $3 m/s^2$; (d) El

ascensor acelera hacia abajo a $3ms^{-2}$; (e) El cable se rompe y el ascensor cae libremente. Nota: Considérese $g = 9.8m/s^2$.

Respuesta: (a) $882 N$, (b) $882 N$, (c) $1152 N$, (d) $612 N$.

9. Una partícula de $100 g$ de masa se mueve de forma que su posición, respecto a cierto sistema de referencia S , está dada en cualquier instante por $x = 3t^2 + t$ (x en metros y t en segundos). Calcula:

(a) La aceleración de la partícula medida por S .

(b) El incremento de energía cinética, medido por S , entre $t = 0 s$ y $t = 2 s$.

(c) Si S se desplaza con velocidad constante $2\vec{m} s^{-1}$ respecto a cierto sistema inercial S' , ¿es S inercial? ¿Qué fuerza actúa sobre la partícula? ¿Qué trabajo, medido por S y por S' , realiza dicha fuerza entre $t = 0 s$ y $t = 2 s$?

(d) Si S se desplaza con aceleración constante $2\vec{m} s^{-2}$ respecto a cierto sistema inercial S' , ¿es S inercial? ¿Qué fuerza actúa sobre la partícula? ¿Qué trabajo, medido por S y por S' , realiza dicha fuerza entre $t = 0 s$ y $t = 2 s$?

10. Un mono de masa $10 kg$ está trepando por una cuerda sin masa, la cual pasa por la rama de un árbol y está unida en el otro extremo a una masa de $15 kg$ (no hay rozamiento). (a) Explicar cómo tendría que moverse el mono por la cuerda para poder elevar la masa de $15 kg$ desde el suelo. (b) Si una vez que ha levantado la masa del suelo, el mono deja de trepar y se mantiene agarrado a la cuerda, ¿cuál será ahora su aceleración? ¿Y la tensión de la cuerda?

Respuesta: (b) $a = 1.96 m/s^2$; $T = 117.6 N$.

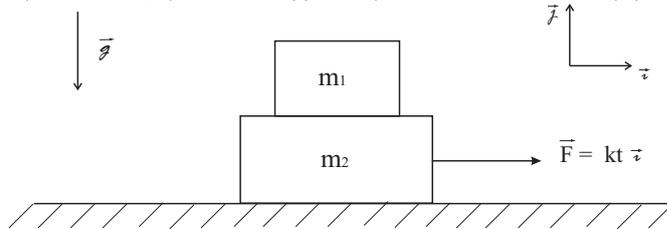
11. Un bloque de masa m_1 se encuentra sobre otro de masa m_2 , el cual se encuentra sobre un plano horizontal liso. Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico son μ_e y μ_d respectivamente. Si se aplica a m_2 una fuerza horizontal cuyo módulo varía con el tiempo de la forma $F = kt$, siendo k una constante, hallar:

(a) El instante t_1 en el que comenzará el deslizamiento relativo entre ambos bloques.

(b) Las aceleraciones de ambos a partir de t_1 .

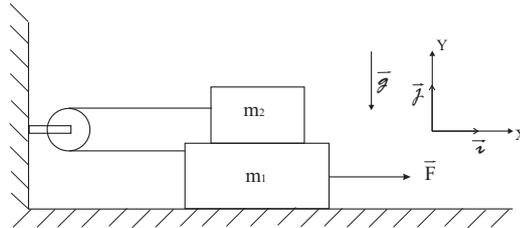
(c) Representar gráficamente las aceleraciones de ambos bloques en función del tiempo.

Respuesta: a) $t_1 = \mu_e g(m_1 + m_2)/k$, b) $a_1 = \mu_d g$, $a_2 = (1/m_2)(kt - \mu_d m_1 g)$.



12. En el sistema de la figura, $m_1 = 1\text{ kg}$ y $m_2 = 0.5\text{ kg}$, y el coeficiente de rozamiento entre m_1 y la superficie de deslizamiento es el mismo que el existente entre m_1 y m_2 , y vale $\mu = 0.4$. La fuerza \vec{F} que tira de m_1 es constante. Considérese que tanto m_1 como m_2 tienen dimensiones despreciables, y que la polea y la cuerda son ideales. Se pide: (a) Fuerzas que actúan sobre m_1 y sobre m_2 .
- (b) Considerando el sistema formado por m_1 y m_2 , decir cuáles son las fuerzas externas y cuáles las fuerzas internas al sistema.
- (c) Aplicar el teorema del centro de masas por separado a m_1 y m_2 , expresando sus componentes horizontal (según OX) y vertical (según OY).
- (d) Aplicar el teorema del centro de masas al sistema constituido por m_1 y m_2 .
- (e) La fuerza de rozamiento entre m_1 y m_2 , ¿verifica, para cualquier valor de $|\vec{F}|$, que su módulo es igual a $\mu m_2 g$? Si piensas que no, ¿cuál es el mínimo valor de $|\vec{F}|$ para que esto ocurra?
- (f) Si $|\vec{F}| = 10.75\text{ N}$, ¿cuál es el módulo de la tensión del hilo?, ¿y la aceleración del sistema? Tómese $g = 10\text{ m s}^{-2}$.

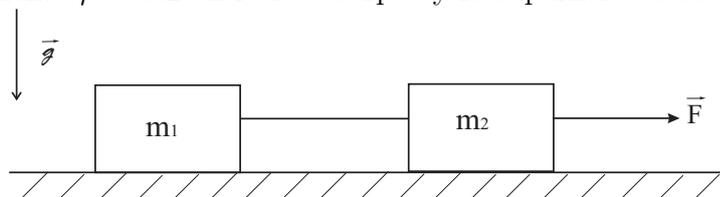
Respuesta: (f) 2.25 N , 0.5 m s^{-2} .



13. Se dispara, en $t = 0$, un proyectil de 10 kg con una velocidad de 400 m s^{-1} y un ángulo de elevación de 60° .
- (a) En un instante dado t_0 la granada explota en dos fragmentos, uno de los cuales tiene una masa $m_1 = 4\text{ kg}$. ¿Se conserva la cantidad de movimiento del sistema constituido por los dos fragmentos en el momento de la explosión? Es decir, ¿podemos afirmar que $\vec{P}(t_0^-) = \vec{P}(t_0^+)$?
- (b) La cantidad de movimiento del sistema justo antes de la explosión, ¿es igual a la cantidad de movimiento para cualquier instante posterior?
- (c) Si consideramos despreciable la resistencia del aire, ¿se conserva alguna componente de la cantidad de movimiento del sistema? ¿Qué trayectoria describe el centro de masas del sistema?
- (d) Supóngase que el proyectil explota en el punto más alto de su trayectoria, y que los dos fragmentos salen horizontalmente. Si el fragmento de 4 kg cae al suelo en un punto distante 10000 m del punto de lanzamiento, ¿en qué punto caerá el fragmento mayor?

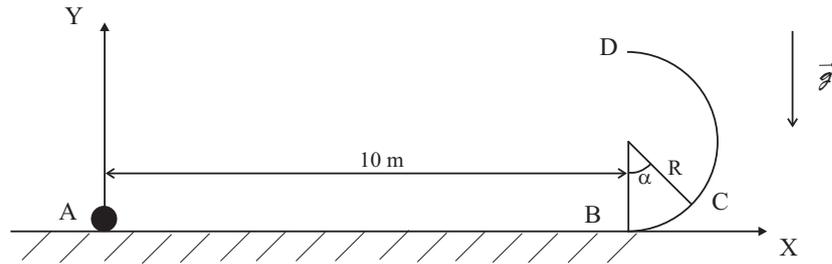
Respuesta: (d) $\approx 16900\text{ m}$.

14. Dos cuerpos de masas $m_1 = 2\text{ kg}$ y $m_2 = 3\text{ kg}$ están unidos por una cuerda de masa despreciable, como indica la figura. La fuerza \vec{F} tiene un módulo de 20 N y no existe rozamiento. Se pide:
- Analizar las masas m_1 y m_2 por separado, indicando las fuerzas que actúan sobre ellas.
 - Considerar el sistema constituido por m_1 , m_2 y la cuerda. ¿Cuáles son las fuerzas externas? ¿Y las fuerzas internas?
 - Aplicando la segunda ley de Newton a m_1 y a m_2 , calcular la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.
 - Obtener la aceleración del sistema aplicando el teorema del centro de masas.
 - Si la cuerda se rompe, ¿cuál es el movimiento posterior de cada una de las masas? ¿Y el del centro de masas del sistema?
 - Repetir todos los apartados anteriores en el caso de que haya un coeficiente de rozamiento $\mu = 0.2$ entre los cuerpos y la superficie de deslizamiento.



15. Se lanza un cuerpo desde el punto A de la figura con una velocidad horizontal de 9 m s^{-1} , recorriendo una distancia horizontal $AB = 10\text{ m}$ y a continuación el arco de circunferencia BC , siendo $R = 1\text{ m}$. En el tramo BC no existe rozamiento y en el tramo AB el coeficiente de rozamiento vale 0.4 . Se pide:
- Analizar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en los tramos AB y BC .
 - Aplicando la segunda ley de Newton en el movimiento de A a B , obtener la aceleración, así como la posición en función del tiempo. ¿Cuál es la velocidad al llegar a B ?
 - Obtener la velocidad en B aplicando el teorema de la energía.
 - Aplicar la segunda ley de Newton al movimiento en el tramo BC , y descomponerla: d.1) en sus componentes horizontal y vertical, d.2) En el sistema constituido por los vectores tangente y normal a la circunferencia.
 - En el tramo BC , ¿qué fuerzas realizan trabajo y cuáles no? ¿Se conserva la energía mecánica?
 - Obtener, aplicando el teorema de la energía, el ángulo máximo α alcanzado por el cuerpo.
 - ¿Cuál tendría que ser la mínima velocidad en A para que la partícula llegase al punto D ?

Respuesta: (f) $\alpha = 29.8^\circ$.



16. Una piedra de masa m , atada a una cuerda ideal de 80 cm de longitud describe una circunferencia en un plano vertical (la cuerda también se encuentra en el plano). Se pide:

(a) ¿Puede el movimiento realizarse a celeridad constante?

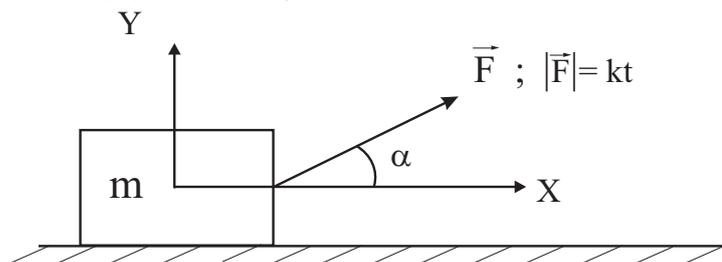
(b) ¿Cuál es el mínimo valor de la tensión máxima que puede soportar la cuerda sin romperse, para que el movimiento sea posible?

(c) Si la tensión máxima que puede soportar la cuerda es diez veces el peso de la piedra, ¿qué velocidad tendría que tener el cuerpo en el punto más alto para que la cuerda se rompiera justo en el punto más bajo de su trayectoria?

Respuesta: (b) $6mg$.

17. Sobre un bloque de masa m de dimensiones despreciables, el cual se encuentra sobre el eje horizontal OX , sin rozamiento, actúa una fuerza \vec{F} de módulo $F = kt$, siendo k una constante y t el tiempo, de forma que \vec{F} forma un ángulo constante α con el eje OX (ver figura). El bloque se encuentra en el campo gravitatorio terrestre (g es la aceleración de la gravedad). Sabiendo que para $t = 0$ el bloque se encuentra en reposo, ¿cuál es su celeridad en el instante en que se separa del plano? ¿Qué espacio recorre hasta ese momento?

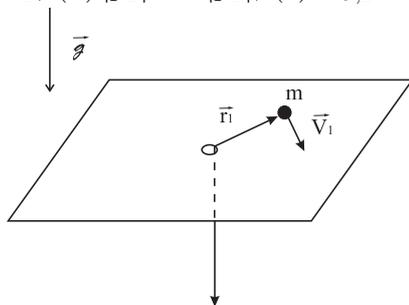
Respuesta: $v = \frac{mg^2 \cos \alpha}{2k \sin^2 \alpha}$; $s = \frac{m^2 g^3 \cos \alpha}{6k^2 \sin^3 \alpha}$.



18. Una esferita de masa m de dimensiones despreciables desliza sobre una mesa horizontal pulida, unida al extremo de un hilo que pasa a través de un agujero O de la misma. Inicialmente, la longitud del hilo sobre la mesa es r_1 y la velocidad de la esfera es $\vec{v}_1 \perp \vec{r}_1$. Se tira del hilo hasta que su longitud sobre la mesa es $r_2 = \frac{r_1}{2}$. Sabiendo que en esta situación también se verifica $\vec{v}_2 \perp \vec{r}_2$, calcular:

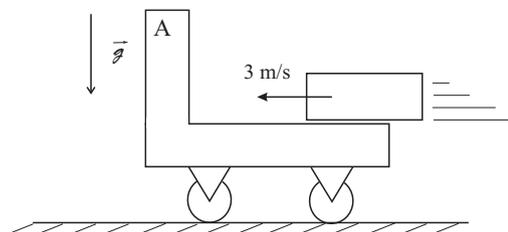
- (a) La celeridad v_2 .
- (b) La variación en el módulo de la cantidad de movimiento.
- (c) La variación en la energía cinética de la esfera.
- (d) El trabajo realizado por la tensión del hilo entre ambas situaciones.

Respuesta: (a) $v_2 = 2v_1$, (b) $|\vec{p}_2| = 2|\vec{p}_1|$, (c) $E_{C,2} = 4E_{C,1}$, (d) $3E_{C,1}$.

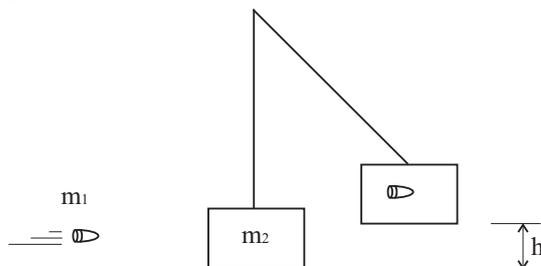


19. Un empleado de una compañía aérea lanza maletas de 15kg de peso a una velocidad (horizontal) de 3 m/s sobre una carretilla de transporte de equipajes de 35 kg de peso. Suponiendo que no existe rozamiento entre la carretilla y el suelo, calcular la velocidad que adquiere:

- (a) Si la maleta llega a detenerse sobre la plataforma de la carretilla.
- (b) Si la maleta choca con el extremo A de la carretilla.
- (c) En ambos casos calcular el incremento de energía cinética en el sistema formado por la carretilla y la maleta.

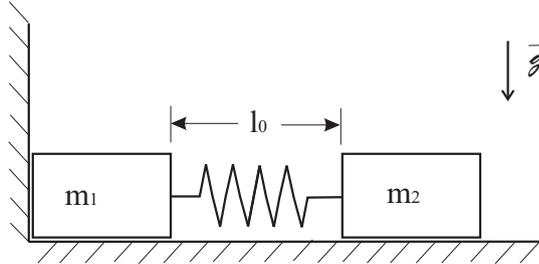


20. En la figura se muestra un péndulo balístico, el cual se usa para determinar la velocidad de una bala midiendo la altura h a la que se eleva el bloque después de que la bala se ha incrustado en él. Demostrar que la velocidad de la bala está dada por $\sqrt{2gh}(m_1 + m_2)/m_1$, donde m_1 es la masa de la bala y m_2 la masa del bloque.



21. En un plano horizontal liso se encuentran dos cuerpos 1 y 2, de masas $m_1 = 1 \text{ kg}$ y $m_2 = 2 \text{ kg}$, unidos por un muelle ideal de constante elástica $k = 4 \text{ N/m}$ y longitud natural $l_0 = 0.5 \text{ m}$, correspondiente a la separación inicial entre los bloques. Se desplaza la masa 2 hacia la izquierda una pequeña distancia $e = 0.1 \text{ m}$ y se suelta. ¿Cuál es la celeridad del centro de masas del sistema en el momento en que la masa 1 se separa de la pared? Explique detalladamente los pasos seguidos en la resolución del problema.

Respuesta: 0.094 m s^{-1} .



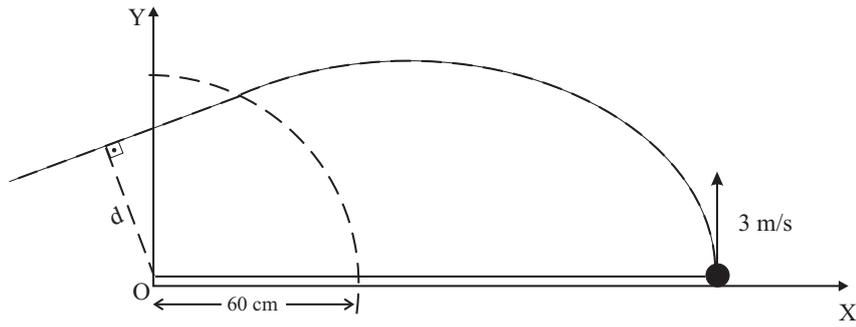
22. Un preso, en una cárcel, decide escapar deslizándose por una cuerda que le ha proporcionado su cómplice. Fija un extremo de la cuerda a un gancho, situado en el exterior de su ventana y el otro extremo cuelga sobre el suelo. La cuerda tiene una masa de 10 kg y el preso tiene una masa de 70 kg . El gancho puede aguantar una tensión de 600 N sin soltarse. Si la ventana del preso está a 15 m sobre el suelo, ¿cuál es la velocidad mínima con la que puede alcanzar el suelo si parte del reposo desde el extremo superior? Nota: Tómese $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Respuesta: 9.2 m s^{-1} .

23. Una esfera de $1/4 \text{ kg}$ y dimensiones despreciables se encuentra unida a un punto fijo O por medio de un hilo elástico de constante $k = 147 \text{ N/m}$ y cuya longitud, indeformado, es de 60 cm . La esfera desliza sobre una superficie lisa horizontal. En la posición 1, la longitud del hilo es de 1 m y la velocidad de la esfera es de 3 m/s , dirigida según se presenta en la figura (normal al hilo). Calcular:

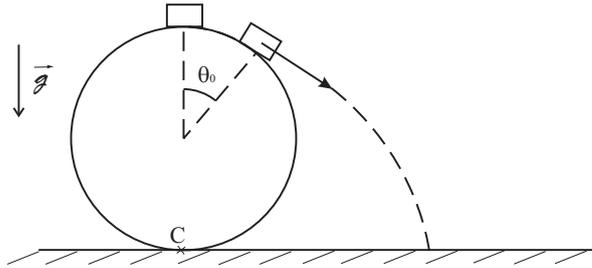
- ¿Qué magnitudes dinámicas se conservan durante el movimiento? Razona la respuesta.
- La celeridad de la esfera en el momento en que el hilo pierde su deformación.
- La mínima distancia d a la que la esfera llega a estar de O .

Respuesta: $v = \sqrt{103.1} \text{ m/s}$; $d = 3/\sqrt{103.1} \text{ m}$.



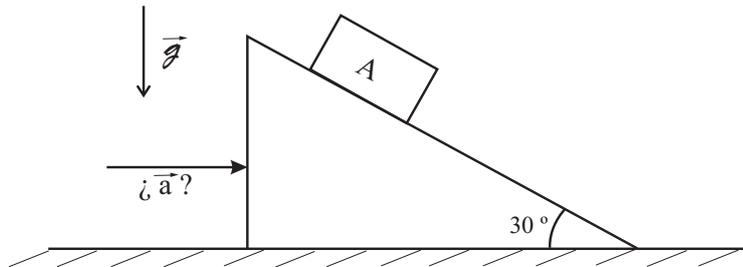
24. Una partícula de masa m se abandona en lo alto de una esfera de radio R , la cual se encuentra rígidamente unida al suelo horizontal. Se le da a la partícula un pequeño empujón, tal que su velocidad inicial es despreciable. Suponiendo que no existe rozamiento, encontrar (a) en qué punto la partícula abandona la esfera sobre la que desliza, y (b) a qué distancia del punto C de contacto llegará al suelo.

Respuesta: (a) $\cos \theta_o = 2/3$; (b) $\approx 1.46R$.



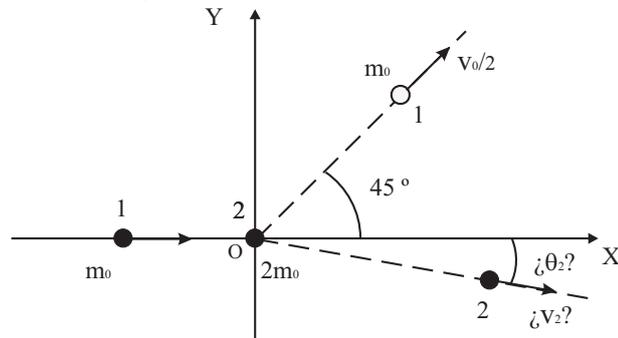
25. Un cuerpo A está situado sobre un plano inclinado de ángulo $\alpha = 30^\circ$ con la horizontal, el cual puede deslizar por el suelo horizontal. Considerando que no existe rozamiento entre el bloque y el plano, (a) ¿qué aceleración se debe comunicar al plano (mediante la fuerza que sea necesaria) para que A suba con una aceleración respecto al plano de módulo 1 m s^{-2} ? (b) ¿Cuál es en dicha situación el módulo de la aceleración de A respecto al suelo? Tómese $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Respuesta: (a) $\approx 6.8 \text{ m/s}^2$ hacia la derecha; (b) $\approx 6 \text{ m/s}^2$.



26. Juanito está en la base de una colina que forma un ángulo de ϕ con la horizontal. Inclina su tirachinas un ángulo α con respecto a la horizontal, y lanza una piedra con una celeridad v_0 . Calcula la distancia medida a lo largo de la colina a la cual llegará la piedra. Nota: supóngase que Juanito lanza la piedra desde el suelo.
27. Una partícula 1 de masa m_0 , que se mueve con celeridad v_0 , choca con una partícula 2 en reposo de masa $2m_0$. Como resultado de la colisión, la partícula 1 es desviada $\theta_1 = 45^\circ$ respecto a su dirección de movimiento inicial, con una celeridad final de $v_0/2$. Obtener la velocidad de la partícula 2 después de la colisión. ¿Se conserva la energía cinética? Explica con detalle los pasos seguidos en la resolución del problema.

Respuesta: $v_2 \approx 0.37v_0$, $\theta_2 = 29^\circ$.



Capítulo 6

OSCILACIONES MECÁNICAS

6.1 Introducción

El movimiento oscilatorio o vibratorio constituye uno de los movimientos más importantes por la gran cantidad de fenómenos de distinta naturaleza en los que aparece. Ello le ha dado un papel relevante en diferentes partes de la Física y la Ingeniería.

En general, se dice que una determinada magnitud oscila cuando su valor varía o fluctúa en el tiempo dentro de unos ciertos límites. Dentro de la Mecánica existen ejemplos conocidos como el movimiento de una partícula en el extremo de un muelle, y el del péndulo. No obstante, las oscilaciones se dan en muchísimas situaciones fuera del campo de la Mecánica Clásica. Por ejemplo, los electrones de una antena radiante o receptora de ondas electromagnéticas, o la carga en ciertos circuitos eléctricos, tienen un movimiento oscilatorio. En el campo de la Mecánica Cuántica, el estudio de las vibraciones de los átomos de una red cristalina tiene una gran importancia en la descripción de las propiedades de los sólidos. Por otro lado, el movimiento oscilatorio es básico en el estudio del fenómeno ondulatorio, dado que en muchos casos las ondas representan la propagación en el espacio de una oscilación producida en un punto. Por ejemplo, en el caso del sonido, el centro de masas de un elemento de volumen conteniendo un número de partículas del orden del número de Avogadro en continuo movimiento aleatorio, oscila alrededor de su posición de equilibrio, y dicha vibración se propaga dando lugar a ondas de presión, densidad y desplazamiento. En el caso de las ondas electromagnéticas, las oscilaciones de los electrones de una antena producen un campo eléctrico oscilante que se propaga en el espacio. Por tanto, para la comprensión de los fenómenos ondulatorios se requiere un estudio previo del movimiento oscilatorio.

Este tema tratará las oscilaciones dentro de la Mecánica Clásica, una parte de la Física que el alumno ha estudiado con cierta profundidad en cursos anteriores. No obstante, las ideas que se desarrollarán a lo largo de este tema aparecen en otros ámbitos muy diferentes de este campo. Por otro lado, dada la dificultad que supone el no conocer aún algunas partes de las matemáticas que son importantes en el estudio de las oscilaciones, y dado el escaso tiempo del que se dispone para abordar

este tema en clase, nos centraremos en las ideas básicas sin adentrarnos mucho en cuestiones matemáticas.

Comenzaremos el tema hablando del movimiento periódico, el cual se caracteriza por su repetición en el tiempo, y más adelante repasaremos brevemente el movimiento armónico simple (M.A.S.), cuya importancia radica en los tres puntos siguientes:

- Desde un punto de vista matemático, el M.A.S. es el más sencillo de los movimientos oscilatorios.
- Este movimiento constituye una buena aproximación para muchas oscilaciones encontradas en la naturaleza, cuando se consideran ciertas hipótesis de idealidad en los sistemas físicos.
- Finalmente, cualquier movimiento oscilatorio, sea o no periódico, se puede expresar como suma de distintos M.A.S. en base al teorema de Fourier, el cual se estudiará en cursos más avanzados.

El resto del tema estará dedicado al estudio de las oscilaciones mecánicas. Comenzaremos describiendo la fuerza y la energía potencial en el movimiento armónico simple. Posteriormente se estudiará el amortiguamiento en los osciladores reales, el cual surge por la presencia del rozamiento. La última parte estará dedicada al oscilador forzado, donde estudiaremos el fenómeno de la resonancia, el cual tiene enorme importancia en todos los campos de la Física y la Ingeniería.

6.2 Movimiento periódico

Una función $x = f(t)$ se dice que es *periódica*, cuando existe un intervalo T , denominado *periodo*, de forma que x se repite a intervalos iguales de T . Es decir,

$$f(t) = f(t + kT) \quad ; \quad \forall t, \quad (6.1)$$

siendo k cualquier número entero no nulo. Nótese que $2T, 3T, \dots$, son también periodos de $f(t)$ según la definición que hemos dado. No obstante, cuando hablemos del periodo de una función, nos referiremos al intervalo más pequeño de la variable independiente necesario para que la función se repita ($k = 1$).

6.3 Movimiento armónico simple

6.3.1 Definiciones

Una función $x(t)$ tiene un movimiento oscilatorio armónico simple alrededor de $x = 0$, cuando la relación existente entre x y t viene dada por

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (6.2)$$

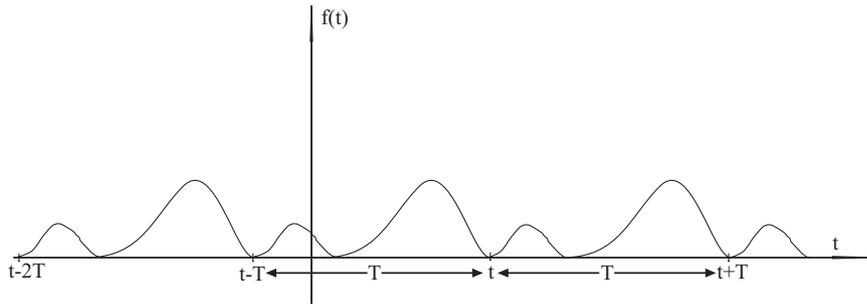


Figura 6.1: Movimiento periódico. La gráfica de $f(t)$ se construye repitiendo la forma que tiene dentro de un periodo.

donde A , ω y ϕ son constantes (A y ω se definen positivas).

Como la función coseno está acotada entre -1 y $+1$, x lo está entre $-A$ y $+A$; por tanto, A representa el desplazamiento máximo respecto de $x = 0$. Esta cantidad se denomina *amplitud* del M.A.S. El argumento del coseno ($\alpha \equiv \omega t + \phi$) se denomina *fase*, de forma que ϕ es la fase correspondiente a $t = 0$, también llamada *fase inicial*. La dependencia de la fase con el tiempo es lineal, y su derivada temporal, ω , se denomina *frecuencia angular*. Por otro lado, el coseno se repite cuando la fase se incrementa en 2π , de forma que el valor de x será el mismo cuando el tiempo se incremente en $2\pi/\omega$:

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega t + \phi + 2\pi) = \cos\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \phi\right].$$

Por tanto, $2\pi/\omega$ es el periodo del M.A.S. y lo representaremos por T . En el sistema internacional el periodo se mide en segundos (s) y la frecuencia angular en radianes por segundo (rad/s).

Al movimiento entre dos valores del tiempo separados por un periodo se le denomina *oscilación*, y el número de oscilaciones por unidad de tiempo se denomina *frecuencia*. La relación entre la frecuencia (que representaremos por ν) y el periodo es:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (6.3)$$

En el sistema internacional ν se mide en hertzios (Hz), siendo $1 Hz \equiv 1 s^{-1}$.

6.3.2 Otras formas de expresar el M.A.S.

Como $\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$, otra manera de expresar (6.2) es

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi'), \quad (6.4)$$

siendo $\phi' = \phi + \pi/2$. Por otro lado, si tenemos en cuenta la expresión del coseno de una suma

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

tenemos:

$$x(t) = A\cos\omega t\cos\phi - A\sin\omega t\sin\phi \equiv C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t, \quad (6.5)$$

donde hemos definido, a partir de A y ϕ , las constantes¹ $C_1 \equiv A\cos\phi$ y $C_2 \equiv -A\sin\phi$. Por tanto, (6.2), (6.4), y (6.5) son formas equivalentes de expresar el M.A.S.

6.3.3 Velocidad

Para obtener la velocidad en el movimiento armónico simple derivaremos (6.2) respecto al tiempo:

$$v_x \equiv \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \phi), \quad (6.9)$$

lo que nos muestra que v_x también oscila armónicamente con frecuencia angular ω , y está acotada entre $-A\omega$ y $+A\omega$. Por tanto, $A\omega$ es el máximo valor que puede tener la celeridad, es decir, es la amplitud de v_x . Por otro lado, como $-\sin\alpha = \cos(\alpha + \pi/2)$, tenemos

$$v_x = A\omega\cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}), \quad (6.10)$$

lo que representa una diferencia de fase de $\pi/2$ radianes entre la velocidad y la posición. Es decir, la velocidad está adelantada $\pi/2$ radianes respecto a la posición. Esto implica que cuando $|x| = A$, es decir, cuando $\omega t + \phi$ es un múltiplo entero de π , la velocidad es igual a cero. De la misma forma, $x = 0$ cuando $\omega t + \phi$ es un múltiplo impar de $\pi/2$, situación para la cual la celeridad alcanza su máximo valor $|v_x|_{max} = A\omega$.

¹Para expresar A y ϕ a partir de C_1 y C_2 , hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$C_1 = A\cos\phi \quad ; \quad C_2 = -A\sin\phi. \quad (6.6)$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumándolas, tenemos, teniendo en cuenta la relación trigonométrica $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$,

$$A = +\sqrt{C_1^2 + C_2^2}. \quad (6.7)$$

Por otro lado, dividiendo la segunda ecuación entre la primera, obtenemos ϕ :

$$\phi = \arctan\left(-\frac{C_2}{C_1}\right). \quad (6.8)$$

Ahora bien, nótese que sólo con (6.8) no tenemos completamente definida la fase (entre 0 y 2π), sino que debemos tener en cuenta el signo del seno o del coseno a partir de (6.6).

Por ejemplo, supongamos que $C_2/C_1 < 0$. Entonces hay dos valores posibles de ϕ , uno en el primer cuadrante y otro en el tercero, donde la tangente es positiva, para los cuales es válida (6.8). ¿Cuál de los dos debemos tomar? Hemos de observar el signo del seno y/o del coseno a partir de (6.6), y entonces sabremos qué solución coger. Por ejemplo, si $C_1 > 0$, el coseno es positivo, y por tanto ϕ se encontrará en el primer cuadrante.

6.3.4 Aceleración

Derivando (6.9) tenemos:

$$a_x \equiv \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi). \quad (6.11)$$

Vemos que la aceleración oscila armónicamente con frecuencia angular ω y amplitud $A\omega^2$, es decir, está acotada entre $-A\omega^2$ y $+A\omega^2$. Teniendo en cuenta que $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$, podemos expresar (6.11) como

$$a_x = A\omega^2 \cos(\omega t + \phi + \pi), \quad (6.12)$$

lo que representa una diferencia de fase de π radianes entre la aceleración y la posición. Es decir, la aceleración está adelantada $\pi/2$ radianes respecto a la velocidad y π radianes respecto a la posición.

Por otro lado, a partir de (6.2) y (6.11) vemos que \ddot{x} y x guardan la relación siguiente:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (6.13)$$

Por tanto, en el M.A.S. la aceleración es proporcional al desplazamiento y opuesta al mismo. La ecuación (6.13) se denomina *ecuación diferencial del M.A.S.*²; sus soluciones, es decir, aquellas funciones $x(t)$ que la verifican, son movimientos armónicos simples de frecuencia angular ω .

6.3.5 Representación gráfica de $x(t)$, $v_x(t)$ y $a_x(t)$

A continuación representaremos gráficamente la posición, la velocidad y la aceleración del M.A.S. Aunque las gráficas del seno y del coseno son de sobra conocidas, haremos hincapié en el papel que desempeña la fase inicial. Por ejemplo, supongamos que ϕ se encuentra en el segundo cuadrante ($\sin\phi > 0$ y $\cos\phi < 0$). En este caso la posición inicial, $x(0) = A\cos\phi$, es negativa, y la recta tangente a la curva en $t = 0$ tiene una pendiente negativa, dado que ésta es igual a la velocidad en $t = 0$, $\dot{x}(0) = -A\sin\phi < 0$. Es decir, la curva $x(t)$ tiene el aspecto que se muestra en la figura (6.2).

En cuanto a la gráfica de la velocidad, ésta comienza, para $t = 0$, con un valor negativo, y la pendiente de la recta tangente, es decir, la aceleración, es positiva, en virtud de (6.13) (la aceleración tiene signo opuesto al de la posición). En la figura (6.3) hemos representado $v_x(t)$.

²Una *ecuación diferencial ordinaria* es una cierta relación entre una función incógnita $x(t)$, sus derivadas, y la variable independiente, de la forma

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots; t) = 0.$$

Por otro lado, se denomina *orden* de la ecuación al grado de la derivada mayor que aparece en ésta. Así, (6.13) es una ecuación diferencial de segundo orden.

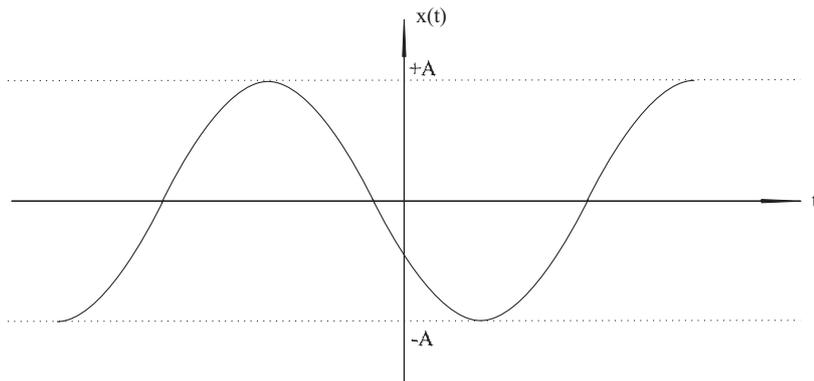


Figura 6.2: Gráfica de $x(t)$ para el caso en que ϕ pertenece al segundo cuadrante.

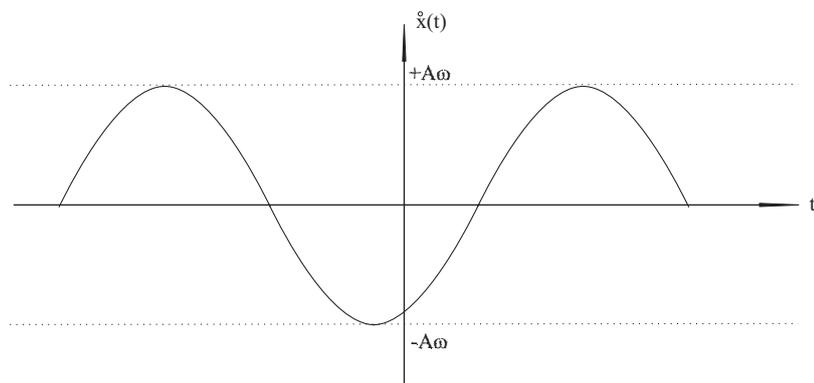


Figura 6.3: Gráfica de $\dot{x}(t)$ para el caso en que ϕ pertenece al segundo cuadrante. Como se puede observar, para aquellos instantes en los que x alcanza los valores $+A$ y $-A$ la velocidad se anula. De la misma forma, cuando $x = 0$ la velocidad alcanza los valores $A\omega$ o $-A\omega$.

Finalmente, la aceleración, como es proporcional y opuesta a x , se anula y alcanza sus valores máximos y mínimos en los mismos instantes que x , aunque con distinto signo por la diferencia de fase de π radianes. En la figura (6.4) hemos representado $a_x(t)$.

Antes de pasar al punto siguiente consideraremos brevemente qué expresiones adoptan la posición, velocidad y aceleración del M.A.S. cuando el movimiento no es alrededor del origen, sino alrededor de un punto $x = x_0$. También obtendremos la expresión de la ecuación diferencial del M.A.S. en este caso. Si tomamos un eje $O'X'$ con origen en $O' \equiv x_0$, el movimiento respecto a $O'X'$ está descrito por la ecuación $x'(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Vemos fácilmente que las posiciones respecto a OX y a $O'X'$ están relacionadas a partir de

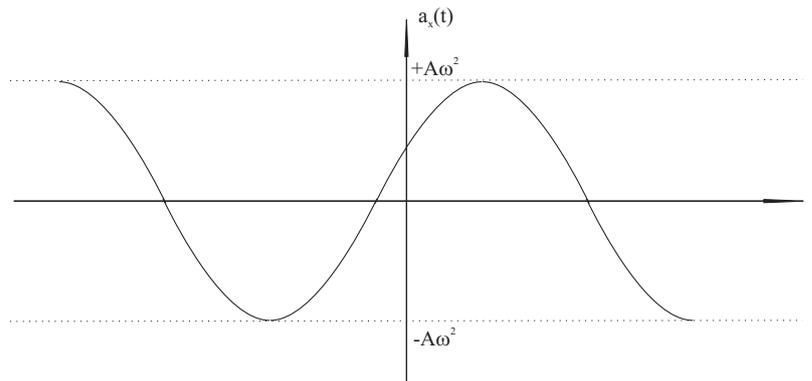


Figura 6.4: Gráfica de $\ddot{x}(t)$ para el caso en que ϕ pertenece al segundo cuadrante.

$$x(t) = x_0 + x'(t) = x_0 + A\cos(\omega t + \phi). \quad (6.14)$$

Por otro lado, como x_0 es una constante, la velocidad y la aceleración estarán dadas por las ecuaciones (6.9) y (6.11) respectivamente. Sin embargo, la ecuación diferencial del M.A.S. en este caso será

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_0. \quad (6.15)$$

6.4 Dinámica del M.A.S. libre

Hasta ahora nos hemos dedicado a los aspectos matemáticos del M.A.S., sin ver ninguna aplicación concreta dentro de la Física. En este apartado vamos a comenzar a estudiar el M.A.S. en el campo de la Dinámica Clásica, y para ello partiremos del siguiente problema: consideremos una partícula de masa m que se mueve en el eje OX , sin rozamiento, debido a la acción de un muelle ideal de longitud natural nula y constante elástica k , el cual tiene un extremo fijo en el origen de coordenadas, y el otro está en contacto con la partícula. En el instante inicial, $t = 0$, la partícula se encuentra en la posición $x(0)$, y tiene una velocidad $\dot{x}(0)$. Ante la pregunta, ¿cómo se mueve la partícula? es decir, ¿cuál es la relación entre la posición y el tiempo, $x = x(t)$?, la respuesta pasa obviamente por aplicar la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow -kx\vec{i} = m\ddot{x}\vec{i} \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (6.16)$$

donde hemos tenido en cuenta que la fuerza que actúa sobre la partícula viene dada por la ley de Hooke:

$$\vec{F}_e = -kx\vec{i}. \quad (6.17)$$

Esta fuerza se denomina *elástica o recuperadora*. En el sistema internacional k se expresa en N/m .

Como en un M.A.S. alrededor del origen la aceleración y la posición verifican la relación (ver(6.13))

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

deducimos, comparando esta ecuación con (6.16), que la partícula oscila armónicamente alrededor del origen con una frecuencia angular

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (6.18)$$

es decir, la solución de (6.16) es

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right). \quad (6.19)$$

Por tanto, el movimiento unidimensional de una partícula que está sometida a una fuerza proporcional al desplazamiento y opuesta al mismo, es un M.A.S. De esta forma, $|\vec{F}|$ es máxima cuando la partícula está en los extremos de oscilación, y nula cuando se encuentra en el origen.

Nótese que la frecuencia de las oscilaciones depende de la naturaleza del sistema oscilante, representada por la constante elástica del muelle y la masa de la partícula. A ω_0 se la denomina *frecuencia propia* o *frecuencia natural*.

Por otro lado, la ecuación (6.16) por sí misma no nos dice cuánto valen A y ϕ (o C_1 y C_2 en el caso de que el M.A.S. esté expresado a partir de (6.5)). Dicho de otro modo, la solución general de (6.16) viene dada por (6.19), donde A y ϕ pueden tomar cualquier valor; es decir, hay infinitas funciones, todos los M.A.S. de frecuencia angular ω_0 alrededor de $x = 0$, que son solución de (6.16). Sin embargo, el movimiento es único, es decir, la amplitud y la fase toman un valor concreto. Estas cantidades se pueden calcular a partir de las condiciones iniciales, $x(0)$ y $\dot{x}(0)$, resolviendo el sistema de ecuaciones

$$x(0) = A \cos \phi \quad ; \quad \dot{x}(0) = -A \omega \sin \phi, \quad (6.20)$$

Por ejemplo, la dependencia de x con t no será la misma si inicialmente la partícula se encuentra en reposo con una elongación dada, que si se encuentra en reposo en el origen. En el primer caso la partícula se mueve con una amplitud igual a la elongación inicial, y en el segundo queda en reposo indefinidamente (nótese que $x = 0$ también es una solución de (6.13)). Por ello, el punto respecto al cual oscila la partícula se denomina, en dinámica, *posición de equilibrio*.

Consideremos ahora que, aparte de la fuerza elástica, sobre la partícula actúa una fuerza constante $\vec{f} = f\vec{i}$. Tal es el caso, por ejemplo, de una masa colgada verticalmente de un muelle que tiene el otro extremo fijo, y que está sometida por tanto a la acción conjunta del muelle y del peso, que es una fuerza constante. A continuación vamos a demostrar que el movimiento es un M.A.S. alrededor de la

posición de equilibrio estático, definida como aquella posición en la que la suma de la fuerza elástica y la fuerza constante se anula, es decir:

$$\vec{F}_e + \vec{f} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad -kx_{eq}\vec{i} + f\vec{i} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad x_{eq} = \frac{f}{k}. \quad (6.21)$$

Aplicando la segunda ley de Newton, tenemos:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \rightarrow \quad -kx\vec{i} + f\vec{i} = m\ddot{x}\vec{i} \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\frac{f}{k}. \quad (6.22)$$

Comparando (6.22) con (6.15) deducimos que el movimiento es un M.A.S. de frecuencia angular $\sqrt{k/m}$, alrededor de $x_0 = x_{eq}$.

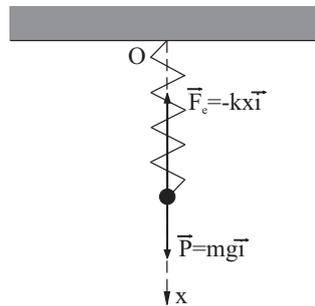


Figura 6.5: Diagrama de fuerzas para una partícula sometida a la acción del peso y de un muelle ideal.

6.4.1 Energía potencial

En este apartado vamos a estudiar el M.A.S. desde un punto de vista energético, para lo cual aplicaremos el teorema de la energía cinética:

$$E_{c2} - E_{c1} = W_{12}(\vec{F}), \quad (6.23)$$

donde E_c es la energía cinética de la partícula, y 1 y 2 hacen referencia a dos posiciones determinadas. El trabajo elemental realizado por $\vec{F} = -kx\vec{i} + f\vec{i}$ cuando la partícula pasa de x a $x + dx$ es:

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = -kx\vec{i} \cdot dx\vec{i} + f\vec{i} \cdot dx\vec{i} = -kxdx + fdx \\ &= -d\left(\frac{1}{2}kx^2 - 2\frac{f}{k}x\right) = -d\left(\frac{1}{2}k\left(x^2 - 2\frac{f}{k}x + \frac{f^2}{k^2}\right)\right) = -d\left(\frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2\right), \end{aligned} \quad (6.24)$$

donde hemos tenido en cuenta que $x_{eq} = f/k$. En la penúltima igualdad de (6.24) hemos sumado f^2/k^2 , que es constante y por tanto su diferencial es nula. Ello nos ha permitido completar el cuadrado de $x - x_{eq}$.

Nótese que δW es igual a la diferencial de una función que depende de la posición, es decir, \vec{F} es conservativa, siendo la energía potencial

$$E_P = \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2, \quad (6.25)$$

donde hemos tomado el cero de energía potencial en $x = x_{eq}$. Teniendo en cuenta esto último en (6.23), se tiene:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_{eq})^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_{eq})^2 \equiv E, \quad (6.26)$$

donde E es la energía mecánica, la cual permanece constante. Por tanto, durante el movimiento hay un continuo trasvase de energía cinética a energía potencial, y viceversa, de forma que la suma de ambas permanece constante. Teniendo en cuenta que para $x = x_{eq} \pm A$ la velocidad es nula, se tiene que $E = (1/2)kA^2$; por tanto, la energía mecánica es proporcional al cuadrado de la amplitud de oscilación.

En la figura (6.6) se muestra la energía potencial de una partícula sometida exclusivamente a la fuerza elástica. La energía mecánica es constante y también se muestra en la figura. A partir de la curva de energía potencial se puede analizar cualitativamente el movimiento:

- En primer lugar vemos que la partícula no se puede encontrar fuera del intervalo $[-A, A]$, dado que en dicha situación la energía cinética sería negativa, lo cual es imposible.
- Como la fuerza es igual a menos el gradiente de la energía potencial, tendrá sentido negativo (positivo) para valores de x positivos (negativos), dado que en esta situación la pendiente a la curva de energía potencial es positiva (negativa). En $x = 0$ la fuerza es nula pues hay un mínimo de energía potencial. Esta es la posición de equilibrio.
- Supóngase por ejemplo que la partícula se encuentra inicialmente en la posición Q , con una velocidad dirigida hacia el sentido positivo del eje OX . Las energías cinética y potencial de la partícula se muestran también en dicha situación. La partícula, en su movimiento, va incrementando su energía potencial y pierde energía cinética hasta que, cuando llega al extremo de la oscilación, toda la energía es potencial y la partícula se encuentra en reposo. En esa posición, la fuerza que actúa sobre la partícula tiene sentido negativo por lo que la partícula se acelerará hacia dicho sentido, ganando celeridad y perdiendo energía potencial. Al pasar por la posición de equilibrio toda la energía es cinética y la potencial es nula.

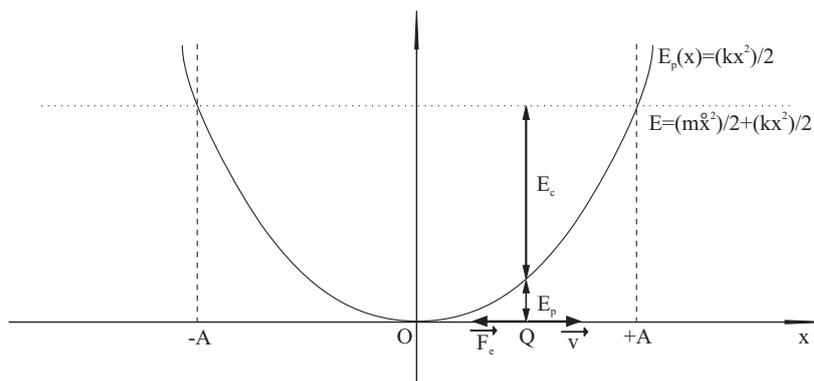


Figura 6.6: Energía potencial y energía mecánica de una partícula sometida a la acción de una fuerza elástica.

6.5 El oscilador libre amortiguado

En el apartado anterior hemos estudiado la dinámica del oscilador armónico libre, donde la energía mecánica permanece constante, de forma que el oscilador nunca se detiene definitivamente. No obstante, esta situación es ideal, pues es bien sabido que la amplitud de las oscilaciones de un sistema real decrece con el tiempo hasta que el cuerpo deja de oscilar; las oscilaciones se amortiguan debido a la interacción del oscilador con el medio en que se mueve. Por ejemplo, si dejamos a un péndulo oscilar libremente a partir de unas ciertas condiciones iniciales, al cabo de un cierto tiempo la amplitud de sus oscilaciones será tan pequeña que no seremos capaces de observarlas a simple vista, si es que no se ha detenido completamente; y ello es debido al rozamiento del péndulo con el aire y con el eje de giro.

Para el estudio del oscilador en un medio que se opone al movimiento hemos de implementar matemáticamente dicho efecto con un término adicional en la segunda ley de Newton. Si bien el tratamiento del rozamiento ocasionado por el medio es bastante complicado, en muchas situaciones se puede considerar que la resistencia al movimiento es proporcional y opuesta a la velocidad del cuerpo. De esta forma, modelamos el rozamiento añadiendo al oscilador la siguiente fuerza

$$\vec{R} = -c\vec{v}, \quad (6.27)$$

siendo c una constante que depende del medio y de la forma del cuerpo.

Consideremos pues el movimiento de una partícula de masa m en el eje OX sometida a la fuerza elástica $\vec{F}_e = -kx\vec{i}$, y a una fuerza $\vec{R} = -c\dot{x}\vec{i}$, de forma que la resultante viene dada por

$$\vec{F}_e + \vec{R} = (-kx - c\dot{x})\vec{i}. \quad (6.28)$$

Aplicando la segunda ley de Newton tenemos:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}. \quad (6.29)$$

Dividiendo por m , teniendo en cuenta que $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$, y definiendo la *constante de amortiguamiento* $\gamma \equiv c/m$, se tiene

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.30)$$

ecuación diferencial que se diferencia de la ecuación del M.A.S. en la aparición del término $\gamma\dot{x}$. El tipo de movimiento en presencia de rozamiento depende de los valores que tengan ω_0 y γ . Dado que no existe aún la base matemática suficiente para abordar la resolución de (6.30), nos limitaremos a hacer una descripción cualitativa de las diferentes situaciones que se presentan, y más adelante estudiaremos con más profundidad la solución de (6.30) en uno de los casos.

- *Amortiguamiento supercrítico*

Se produce cuando $\gamma > 2\omega_0$. Este caso se caracteriza porque la partícula regresa a la posición de equilibrio sin oscilar. El movimiento se denomina *sobreamortiguado*.

- *Amortiguamiento crítico*

Se da cuando $\gamma = 2\omega_0$. Este caso es, cualitativamente, análogo al anterior. La partícula no oscila antes de pararse.

- *Amortiguamiento subcrítico*

En esta situación

$$\gamma < 2\omega_0, \quad (6.31)$$

y la partícula realiza oscilaciones antes de pararse. El movimiento se denomina *subamortiguado* y (6.31) se denomina *condición de oscilación*. Este caso es el que vamos a tratar con un poco más de profundidad.

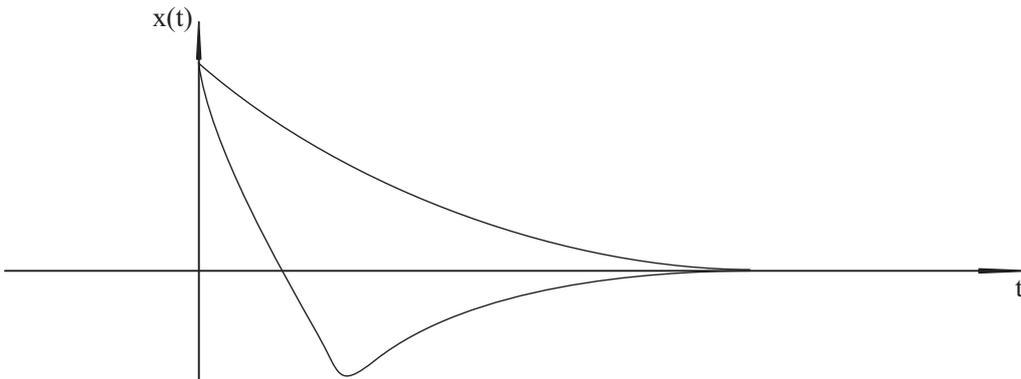


Figura 6.7: Movimiento de una partícula en el caso $\gamma \geq 2\omega_0$.

6.5.1 Movimiento subamortiguado

En este caso, la solución de (6.30) es³:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_a t + \phi) \equiv e^{-\frac{\gamma}{2}t} (C_1 \cos \omega_a t + C_2 \operatorname{sen} \omega_a t), \quad (6.32)$$

siendo A y ϕ (C_1 y C_2) dos constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales del movimiento, y

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{2\omega_0}\right)^2}, \quad (6.33)$$

una frecuencia inferior a la de las oscilaciones libres. En el caso de que $\gamma \ll \omega_0$, $\omega_a \approx \omega_0$. Al cociente entre ω_0 y γ se le denomina *factor de calidad*, y lo representaremos por Q , es decir:

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{\gamma}. \quad (6.34)$$

Nótese que $x(t)$ es el producto de dos funciones:

- la exponencial decreciente,

$$A(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}, \quad (6.35)$$

cuyo decaimiento en el tiempo es tanto mayor cuanto más grande sea el valor de γ .

- Y $\cos(\omega_a t + \phi)$, que representa un M.A.S. de frecuencia angular $\omega_a < \omega_0$. Ésta es la frecuencia propia de las oscilaciones libres amortiguadas.

Es decir, en el caso subamortiguado la partícula realiza oscilaciones. Nótese que el movimiento no es periódico dado que no se verifica $x(t) = x(t + T_a)$, siendo $T_a = 2\pi/\omega_a$. No obstante, la partícula pasa periódicamente por el origen con el mismo sentido para la velocidad, siendo T_a el periodo correspondiente. Este tiempo es mayor que el periodo de las oscilaciones sin amortiguamiento. Transcurrido un cierto tiempo (matemáticamente para $t \rightarrow \infty$) la partícula se detiene debido a la acción del rozamiento⁴.

³Si bien no vamos a abordar la resolución de esta ecuación, puede comprobarse, sustituyendo (6.32) en (6.30), que se verifica dicha relación entre x y sus derivadas.

⁴Nótese que, según (6.32), la partícula no se detiene nunca. En la práctica, un oscilador real se detiene transcurrido un tiempo finito, porque $A(t)$ es tan pequeña que ya no somos capaces de observar a simple vista las oscilaciones. Además, cuando $A(t)$ es pequeña, la sustitución de (6.32) (y su derivada respecto al tiempo) en (6.28) nos dice que la fuerza resultante es pequeña, lo que implica que la probabilidad de que nuestro modelo matemático (el oscilador amortiguado) no reproduzca bien a nuestro sistema físico real, aumenta. Esto es así porque al modelar la realidad despreciamos ciertas influencias, por ser pequeñas; pero cuando las influencias principales se hacen pequeñas, aquéllas ya no son despreciables frente a éstas.

Este tipo de fenómenos (la fiabilidad/precisión de nuestros modelos decae cuando las variables básicas se hacen pequeñas) trasciende al oscilador armónico y a otras muchas cosas, y debería resaltarse en la preparación de los ingenieros.

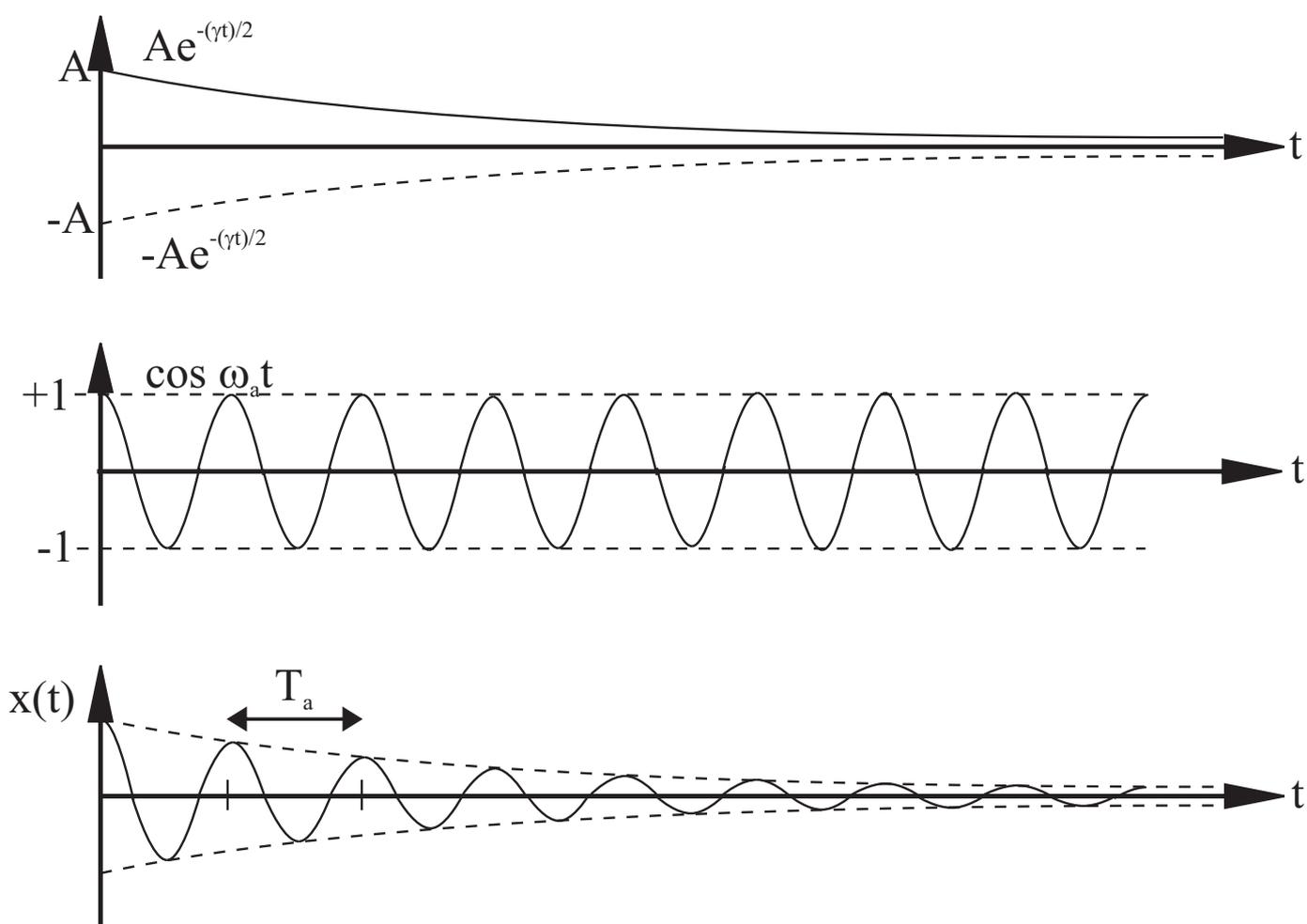


Figura 6.8: Movimiento subamortiguado. Se ha representado el caso en que $\phi = 0$, de manera que $x(0) = A$.

La relación entre $A(t)$ y $A(t + T_a)$ es

$$\frac{A(t)}{A(t + T_a)} = e^{\frac{\gamma}{2}T_a}, \quad (6.36)$$

y no depende del instante t que se considere. Esto nos permite medir experimentalmente de una forma muy cómoda el amortiguamiento, mediante el denominado *decremento logarítmico*, que consiste en el logaritmo neperiano de la cantidad anterior, y se representa por la letra Δ . De esta forma,

$$\Delta \equiv \ln \frac{A(t)}{A(t + T_a)} = \frac{\gamma}{2}T_a = \frac{\gamma\pi}{\omega_a} = \frac{\pi\gamma}{\omega_0\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}}}. \quad (6.37)$$

Para analizar si la partícula oscila mucho o poco antes de detenerse, definiremos un *tiempo de amortiguamiento*, como aquel que tiene que transcurrir antes de que $A(t)$ decaiga a $1/e$ veces de su valor inicial. Es fácil comprobar que este tiempo, al que llamaremos τ , es igual a $2/\gamma$, es decir:

$$A\left(t = \frac{2}{\gamma}\right) = \frac{A}{e}.$$

Si el cociente τ/T_a es grande, la partícula oscilará muchas veces antes de detenerse; si por el contrario, es pequeño, la partícula oscilará poco antes de pararse. Se puede ver fácilmente que este cociente es igual al inverso del decremento logarítmico:

$$\frac{\tau}{T_a} = \frac{\omega_a}{\pi\gamma} = \Delta^{-1} = \frac{\omega_0\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}}}{\pi\gamma} = \frac{Q}{\pi}\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}. \quad (6.38)$$

Nótese que el decremento logarítmico, y por tanto τ/T_a , dependen únicamente del valor que tome el factor de calidad. Si $Q \gg 1$, entonces $\tau/T_a \gg 1$, y la partícula oscilará muchas veces antes de pararse. En esta situación $A(t)$ y $A(t + T_a)$ son parecidos, y $A(t)$ recibe el nombre de *amplitud* del movimiento subamortiguado, por la analogía con el M.A.S. donde la amplitud es constante.

6.6 El oscilador forzado

Un problema de gran importancia en el estudio de las vibraciones es el de un oscilador sometido, aparte de la fuerza elástica y el rozamiento, a una fuerza periódica externa. Por ejemplo, si acoplamos un diapasón a una caja resonante, sus vibraciones fuerzan al aire dentro de la caja, y a sus paredes, a oscilar. Otro ejemplo, dentro del Electromagnetismo, se produce cuando las ondas electromagnéticas llegan a un receptor de radio o televisión y actúan sobre sus circuitos, produciendo oscilaciones eléctricas forzadas. La importancia de las oscilaciones forzadas se basa en que la respuesta de cualquier sistema físico a la acción externa es función de la

frecuencia con la que el sistema es perturbado. El sistema acaba siempre oscilando a la frecuencia externa, pero con una amplitud que es función de dicha frecuencia. Por otro lado, cuando la frecuencia externa adopta cierto valor, que depende de las características del oscilador, se produce un fenómeno, denominado *resonancia*, que se caracteriza porque la amplitud de oscilación se hace máxima (en los osciladores cuyo amortiguamiento es muy pequeño la frecuencia de resonancia casi coincide con la frecuencia propia del oscilador). Por ejemplo, un receptor de radio se sintoniza variando la frecuencia de resonancia de sus circuitos, hasta que dicha frecuencia se corresponde con la de las señales que recibe. En un sistema mecánico pueden producirse vibraciones cuya amplitud puede llegar a ser perjudicial, si dicho sistema entra en resonancia debido al acoplamiento con algún agente externo; un ejemplo lo tenemos en el derrumbamiento del puente de Tacoma en 1940, debido al acoplamiento resonante entre el puente y el viento.

Para estudiar las oscilaciones forzadas en el ámbito de la Mecánica supondremos una partícula de masa m , que además de estar sometida a una fuerza elástica $\vec{F}_e = -kx\vec{i}$, se ve sometida a una fuerza periódica que por simplicidad supondremos armónica, es decir⁵

$$\vec{F} = F_0 \cos \omega t \vec{i}, \quad (6.39)$$

donde F_0 es la amplitud de dicha fuerza (el valor máximo que tiene), y ω la frecuencia angular a la que oscila. Esta fuerza se suele denominar *fuerza excitadora*.

La frecuencia ω puede tomar en principio cualquier valor, siendo en general diferente de ω_0 . La ecuación de movimiento se obtiene aplicando la segunda ley de Newton:

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \cos \omega t \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (6.40)$$

Esta ecuación se diferencia de la del M.A.S. en la presencia del término oscilante de frecuencia angular ω , y su resolución tiene mayor complejidad matemática. No obstante, y con el objeto de resaltar los aspectos fundamentales del oscilador forzado, nos guiaremos por nuestra intuición para buscar una solución particular de esta ecuación. Hemos de buscar una función $x(t)$ tal que, al sustituirla junto a su derivada en (6.40), se verifique dicha relación. Según vimos anteriormente al estudiar el M.A.S., la velocidad y aceleración de un M.A.S. son también movimientos armónicos simples de la misma frecuencia. Ensayaremos pues como solución un M.A.S. a la frecuencia de la fuerza excitadora:

$$x_f(t) = C \cos \omega t, \quad (6.41)$$

donde el subíndice f se refiere a forzado. Sustituyendo (6.41) en (6.40) y realizando algunas operaciones sencillas, se llega a la relación:

$$C(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad \rightarrow \quad C = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

⁵No vamos a considerar por ahora la presencia de rozamiento, porque esto complica demasiado las matemáticas. Una vez hallamos analizado el oscilador forzado sin rozamiento describiremos cualitativamente lo que ocurre en presencia de rozamiento.

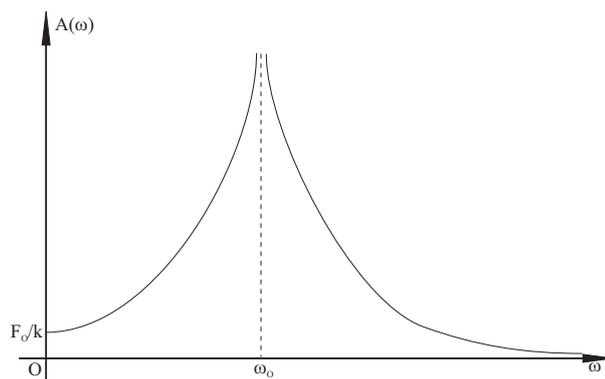


Figura 6.9: Representación de $A(\omega)$ para el oscilador forzado sin amortiguamiento.

Sustituyendo en (6.41) obtenemos finalmente

$$x_f(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \quad (6.42)$$

Como se puede observar, la solución forzada se caracteriza porque la amplitud de depende de los dos parámetros, F_0 y ω , que caracterizan la fuerza excitadora:

$$A(\omega) \equiv |C| = \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|}, \quad (6.43)$$

donde hemos puesto el valor absoluto dado que ω puede ser mayor o menor que ω_0 .

En la figura 6.9 hemos representado $A(\omega)$. La dependencia con F_0 es lineal, es decir, $A(\omega)$ crece proporcionalmente con F_0 . Sin embargo, la dependencia con ω no es lineal. Nótese que cuando ω es muy inferior a ω_0 la amplitud de las oscilaciones tiende a $F_0/m\omega_0^2$, y cuando ω es mucho mayor que ω_0 , $A(\omega)$ tiende a cero. Por el contrario, cuando ω se acerca a ω_0 la amplitud de las oscilaciones se hace cada vez más grande hasta que en el límite $\omega \rightarrow \omega_0$ esta cantidad tiende a infinito. A este fenómeno se le conoce con el nombre de *resonancia*, y se produce en muchas situaciones de naturaleza física diferente. En realidad no existen osciladores forzados en la naturaleza cuya amplitud tienda a infinito en la resonancia, debido, por un lado, al hecho de que siempre existe amortiguamiento en los osciladores reales, y por otro lado, a que cuando las amplitudes de oscilación se hacen muy grandes se incrementa la probabilidad de que nuestro modelo matemático no reproduzca bien la realidad. Por ejemplo, los resortes mecánicos dejan de comportarse linealmente para grandes amplitudes.

Por otro lado, nótese a partir de (6.42) que cuando $\omega_0 > \omega$, x está en fase⁶ con la fuerza externa, dado que el término que multiplica al coseno es positivo, mientras que para $\omega > \omega_0$, x está en oposición de fase⁷ con la fuerza.

⁶Es decir, las fases (los argumentos de los cosenos) de $x_f(t)$ y de $F(t) = F_0 \cos \omega t$ son iguales.

⁷Es decir, las fases de $x_f(t)$ y de $F(t)$ difieren en π .

Antes de terminar vamos a hacer una parada para preguntarnos algo que tal vez más de uno ya se haya formulado: ¿dónde aparecen las condiciones iniciales en las oscilaciones forzadas que hemos estudiado? Puede resultar extraño que ni la amplitud ni la fase del movimiento forzado dependan de las condiciones iniciales, pues nuestra intuición nos dice que el movimiento debe depender de alguna manera de cómo se inició éste, es decir, de la posición y la velocidad que tenía la partícula en una situación inicial. Es cierto que el movimiento depende de las condiciones iniciales; lo que ocurre es que la solución general de la ecuación (6.40) no es tan sólo (6.41). Supongamos que sumamos a (6.41) una solución de la ecuación $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, la cual es de la forma $x_l = A_l \cos(\omega_0 t + \phi_l)$, donde el subíndice “l” se refiere a libre. Se puede comprobar fácilmente que la suma de ambas funciones verifica (6.40), de manera que la solución general⁸ se puede expresar de la forma

$$x = x_l + x_f = A_l \cos(\omega_0 t + \phi_l) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \quad (6.44)$$

La información sobre las condiciones iniciales se encuentra incluida en A_l y ϕ_l .

6.6.1 El oscilador forzado amortiguado

Finalmente consideraremos el caso en que existe rozamiento con el medio, de forma que a la fuerza externa armónica y a la fuerza elástica hay que añadirles el término de rozamiento $-c\dot{x}$. Tenemos:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F_0 \cos \omega t \rightarrow \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (6.45)$$

La resolución de esta ecuación tiene una dificultad mucho mayor que la del caso tratado anteriormente, aunque las ideas esbozadas en dicha situación nos permitirán comprender sin dificultad este caso. Al igual que en el caso no amortiguado, la solución general se expresa como la suma de la solución general de la ecuación $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, que llamaremos $X_T(t)$, y una solución de la ecuación completa (6.45), que llamaremos $X_E(t)$. X_T es la solución al movimiento libre amortiguado (ver (6.32)), y tiende a cero cuando t se hace lo suficientemente grande; por ello se denomina *término transitorio* (de ahí el subíndice “T”). Por otro lado, X_E es una función armónica con la misma frecuencia de la fuerza excitadora, y con una amplitud y una fase que dependen de dicha frecuencia. A este término se le denomina *estacionario* porque perdura indefinidamente en el tiempo (de ahí el subíndice “E”). Se puede demostrar que la solución estacionaria está dada por:

⁸En la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales, la solución general de una ecuación diferencial es una función que “*contiene*” a TODAS las soluciones de la ecuación. Esta función depende de parámetros constantes, que pueden tomar valores arbitrarios. Precisamente, la manera de obtener las distintas soluciones de la ecuación diferencial consiste en ir dando distintos valores a estos parámetros en la solución general. Se puede demostrar que (6.44) es la solución general de (6.40). En este caso, los parámetros son A_l y ϕ_l .

$$X_E(t) = A(\omega)\cos[\omega t + \phi(\omega)], \quad (6.46)$$

donde $A(\omega)$ y ϕ son⁹:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}. \quad (6.47)$$

$$\phi = \arctg\left(\frac{-\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad ; \quad \text{sen}\phi < 0 \quad (6.48)$$

En la figura 6.10 hemos representado $A(\omega)$ para diferentes valores del amortiguamiento. Al igual que en el apartado anterior existe un valor de la frecuencia externa, $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$ (ver problemas), para el que la amplitud de oscilación es máxima, aunque en dicha situación de resonancia la amplitud de las oscilaciones ya no es infinita. Cuanto menor es γ más estrecha es la curva de resonancia, mayor es la amplitud en la resonancia, y más cercana es ω_r a la frecuencia propia (ω_0) del oscilador.

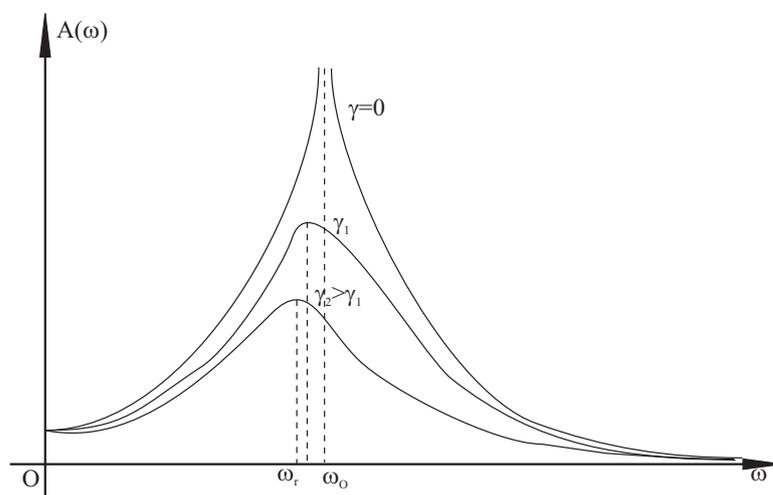


Figura 6.10: Curvas de resonancia.

La expresión general de $x(t)$ es:

$$x(t) = X_T(t) + X_E(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(C_1\cos\omega_a t + C_2\text{sen}\omega_a t) + A(\omega)\cos[\omega t + \phi(\omega)], \quad (6.49)$$

donde las constantes C_1 y C_2 se obtienen a partir de las condiciones iniciales. Nótese que hay una etapa inicial del movimiento en la que el término transitorio es importante. Esta etapa se denomina *régimen transitorio*. Debido al decaimiento exponencial de X_T se llega a una situación en la que este término es despreciable frente al término estacionario, de forma que

$$x(t) \approx A(\omega)\cos[\omega t + \phi(\omega)]. \quad (6.50)$$

⁹Ejercicio: compruébese que cuando $\gamma \rightarrow 0$ se recupera la solución para el caso no amortiguado.

Esta parte del movimiento se denomina *régimen permanente*, y perdura indefinidamente en el tiempo. Nótese que, sean cuales sean las condiciones iniciales, al final siempre se llega a una situación dada por (6.50), la cual es independiente de cómo comenzó el movimiento.

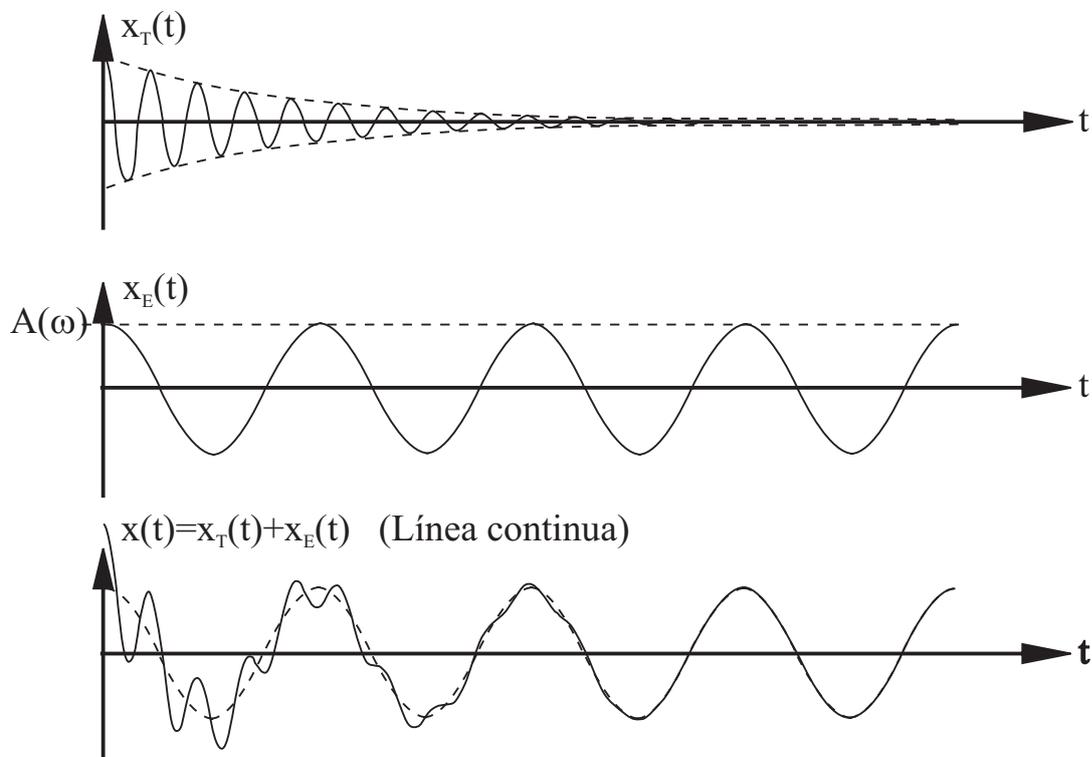


Figura 6.11: Se muestra el comportamiento de $x(t)$, suma de la solución amortiguada $x_T(t)$, y del término estacionario $x_E(t)$. Nótese que al cabo de un cierto tiempo la contribución del término transitorio es despreciable, y $x(t) \approx x_E(t)$, alcanzándose el régimen permanente.

6.7 Problemas

- Una partícula oscila armónicamente con una frecuencia de 100 Hz y una amplitud de 3 mm . Se pide:
 - Calcular el módulo de la velocidad y la aceleración en el medio y los extremos de su trayectoria.
 - Escribir la expresión de la elongación como función del tiempo. Tómese la fase inicial igual a cero.

Respuesta: (a) En el punto medio $a = 0$, $v = 1.88\text{ m/s}$; en los extremos $a = 11.8 \times 10^2\text{ m/s}^2$, $v = 0$; (b) $x = 3 \times 10^{-3}\cos(200\pi t)\text{ (m)}$.

- Encontrar, para el movimiento armónico simple alrededor del origen, los valores medios ¹⁰ de x y x^2 dentro de un periodo del movimiento.

Ayuda: utilícese la relación $\cos^2 a = (1 + \cos 2a)/2$.

Respuesta: $\langle x \rangle = 0$; $\langle x^2 \rangle = A^2/2$.

- Un punto oscila a lo largo del eje OX según la ley $x = A\cos(\omega t - \pi/4)$. Se pide:
 - Representar gráficamente $x(t)$, $v_x(t)$ y $a_x(t)$.
 - Obtener $v_x(x)$ y $a_x(x)$ y representarlas gráficamente.

Respuesta: (b) $(v_x/A\omega)^2 + (x/A)^2 = 1$, $a_x = -\omega^2 x$.

- Una partícula oscila armónicamente en el eje OX alrededor de $x_{eq} = 2\text{ cm}$, siendo la amplitud del movimiento $A = 3\text{ cm}$. Sabiendo que en $t = 0$ su posición y velocidad son $x_0 = 3.5\text{ cm}$ y $\dot{x}_0 = -2.5\text{ cm/s}$, calcular:
 - Ley del movimiento.
 - ¿Qué relación hay entre \ddot{x} y x ?
 - Sea $x' = x - x_{eq}$. ¿Qué relación hay entre \ddot{x}' y x' ?

Respuesta: (a) $x = 2 + 3\cos[(5\sqrt{3}/9)t + \pi/3]\text{ (cm)}$.

- Un punto P se mueve a lo largo del eje OX según la ley $x = A\sin^2(\omega t - \pi/4)$. Se pide:

¹⁰Dada una función $y = f(x)$, el valor medio de $f(x)$ entre dos puntos $x = x_1$ y $x = x_2$, se define por

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx}{x_2 - x_1}.$$

- (a) Punto respecto al cual oscila P , así como la amplitud y periodo del movimiento.
- (b) Representar gráficamente $x(t)$.
- (c) Obtener $v_x(x)$ y representarla gráficamente.

Ayuda: utilícese la relación $\text{sen}^2 a = (1 - \cos 2a)/2$.

Respuesta: (a) $A/2$, $A/2$, π/ω ; (c) $v_x^2 = 4\omega^2 x(A - x)$.

6. Una partícula realiza un M.A.S. alrededor del origen, $x = A\cos(\omega t + \phi)$. Sabiendo que en $t = 0$, $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$, obtener la amplitud del movimiento y la fase inicial en función de x_0 y v_0 .

Respuesta: $A = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2/\omega^2}$; $\phi = \text{tg}^{-1}(-\dot{x}_0/\omega x_0)$.

7. Mismo problema anterior, pero en este caso el M.A.S. lo expresamos como $x = C_1\cos\omega t + C_2\text{sen}\omega t$. Obtener C_1 y C_2 a partir de las condiciones iniciales.

Respuesta: $C_1 = x_0$; $C_2 = \dot{x}_0/\omega$.

8. Una partícula oscila armónicamente en el eje OX alrededor del origen. La frecuencia de las oscilaciones es 4 s^{-1} . Sabiendo que en cierto instante la posición y velocidad de la partícula son 25 cm y 100 cm/s respectivamente, hallar la posición y la velocidad 2.40 segundos después.

Respuesta: $x = -22.6\text{ cm}$, $v_x = 288\text{ cm/s}$.

9. Un punto oscila a lo largo del eje OX según la ley $x = A\text{sen}\omega t$. Calcular la velocidad media y la celeridad media entre $t = 0$ y $t = 3T/8$, siendo $T = 2\pi/\omega$.

Respuesta: $\langle v_x \rangle = 2\sqrt{2}A\omega/3\pi$; $\langle v \rangle = 2A\omega(4 - \sqrt{2})/3\pi$.

10. Una partícula se mueve en el eje OX de forma que su velocidad es $\dot{x} = 35\cos\pi t\text{ cm/s}$, donde t viene dado en segundos. Sabiendo que en $t = 0$ la partícula se encuentra en $x = 0$, calcular:

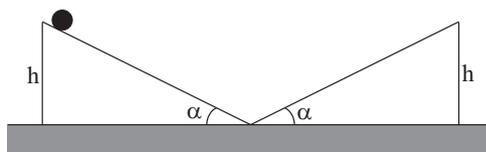
- (a) $x(t)$
- (b) Espacio recorrido en los primeros 2.80 s de movimiento.

Respuesta: (a) $x = (35/\pi)\text{sen}\pi t$; (b) $s = 0.6\text{ m}$.

11. Con el objeto de medir la velocidad de una bala se dispone del siguiente montaje: un bloque de masa $M = 5\text{ kg}$ que se encuentra unido a un muelle ideal de constante elástica $k = 200\text{ N/m}$, sin existir rozamiento con el suelo. La bala (de masa $m = 20\text{ g}$) se dispara horizontalmente sobre el bloque, quedando incrustada en éste. Sabiendo que el sistema realiza oscilaciones armónicas de amplitud $A = 0.2\text{ m}$, ¿qué velocidad llevaba la bala antes de la colisión?

Respuesta: 317 m/s

12. Una partícula se coloca en reposo a una altura h sobre uno de los planos inclinados de semiángulo α y se deja en libertad desde el reposo (ver figura). Sabiendo que no existe rozamiento, se pide:
- Demostrar que el movimiento de la partícula es periódico, y determinar el valor del periodo.
 - ¿Es armónico simple?



Respuesta: (a) $T = (4/\text{sen}\alpha)\sqrt{2h/g}$.

13. Obtener para el movimiento oscilatorio amortiguado $x(t) = Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega_a t + \phi)$, la relación entre A y ϕ con las condiciones iniciales x_0 y \dot{x}_0 .
14. Se pide lo mismo que en el problema anterior, para el caso en que $x(t)$ se exprese de la forma

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}(C_1 \cos \omega_a t + C_2 \text{sen} \omega_a t),$$

es decir, obtener C_1 y C_2 a partir de x_0 y \dot{x}_0 .

Respuesta: $C_1 = x_0$; $C_2 = (\dot{x}_0 + \gamma x_0/2)/\omega_a$.

15. Un cuerpo suspendido verticalmente de un resorte oscila, en ausencia de resistencia, con un periodo $T = 0.2\pi$ s, y en presencia de ella proporcionalmente a la primera potencia de la velocidad, con un periodo $T_a = 0.25\pi$ s. Hallar la ley de las oscilaciones amortiguadas del cuerpo $x(t)$, si en el momento inicial el resorte se encontraba estirado, a partir de su posición inicial de equilibrio estático x_{eq} , a $x_0 = 0.06$ m, y en reposo.

Respuesta: $x - x_{eq} = 0.075e^{-6t} \cos(8t - 0.643)$ m.

16. Sea una masa puntual unida mediante un hilo ideal de longitud l a un punto fijo O , la cual oscila en torno a su posición de equilibrio sometida a la acción del campo gravitatorio (péndulo simple). Se pide:
- Suponiendo que durante el movimiento la desviación θ de la posición de equilibrio es muy pequeña, de forma que se pueda realizar la aproximación $\text{sen}\theta \approx \theta$, demostrar que el movimiento es armónico simple.
 - ¿Cuál es la frecuencia angular del movimiento?

Respuesta: b) $\omega = \sqrt{g/l}$.

17. Demostrar que en el movimiento oscilatorio amortiguado el ritmo de variación de la energía mecánica es $dE/dt = -c\dot{x}^2$.

Ayuda: aplicar el teorema de la energía.

18. Calcular el factor de calidad de un oscilador en el que la amplitud del desplazamiento disminuye η veces cada n periodos de oscilaciones. Aplicarlo al caso $\eta = 2$, $n = 110$.

Respuesta: $Q = (1/2)\sqrt{1 + 4n^2\pi^2/\ln^2\eta}$; $Q \approx 500$.

19. Un punto realiza oscilaciones amortiguadas con una frecuencia angular $\omega_a = 25 \text{ rad/s}$. Obtener la constante de amortiguamiento γ , sabiendo que en el instante inicial, $t = 0$, la velocidad es nula y el desplazamiento a partir de la posición de equilibrio es $\eta = 1.020$ veces menor que $A(t = 0)$.

Respuesta: $\gamma = 2\omega\sqrt{\eta^2 - 1} = 10 \text{ s}^{-1}$.

20. Sea $E_m(t_0)$ la energía mecánica de un oscilador amortiguado en un instante dado t_0 . Demostrar que la energía mecánica después de n oscilaciones es

$$E_m(t_0 + nT_a) = E_m(t_0)e^{-\gamma nT_a},$$

donde T_a es el periodo de las oscilaciones.

21. Se cuelga una masa de un muelle ideal en presencia del campo gravitatorio terrestre ($g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$) y se observa que el muelle sufre una elongación $d_0 = 10 \text{ cm}$. A continuación se coloca la masa sobre una superficie horizontal rugosa (el rozamiento es viscoso), dejando al sistema oscilar libremente. Si después de $n = 10$ oscilaciones la energía potencial elástica se ha reducido a $\eta = 0.5$ veces de su valor inicial, se pide:

- Frecuencia natural (correspondiente a las oscilaciones libres sin rozamiento).
- Constante de amortiguamiento.
- ¿Cuánto tendría que aumentar como mínimo el coeficiente de rozamiento de la superficie para que el mismo sistema no realizase oscilaciones?

Respuesta: a) 9.9 rads^{-1} ; b) 0.11 s^{-1} ; c) 180 veces

22. Sea $x = Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega_a t + \phi)$ la ley del movimiento de un oscilador amortiguado. Demostrar que la dependencia con el tiempo de la energía mecánica del oscilador es, en el caso $Q \gg 1$:

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2e^{-\gamma t}.$$

23. Calcular el factor de calidad de un péndulo simple de longitud $l = 50 \text{ cm}$ si en el transcurso de tiempo 5.2 min , su energía mecánica total disminuye 4.0×10^4 veces. Considérense oscilaciones pequeñas (ver problema 16.).

Ayuda: supóngase $\omega_0 \gg \gamma$ y compruébese posteriormente dicha hipótesis.

Respuesta: $Q = 1.3 \times 10^2$.

24. Una partícula de masa 800 gr cuelga en equilibrio de un muelle vertical de constante 4 N/m y longitud natural nula. La partícula se desplaza verticalmente hacia abajo una distancia de 5 cm y se deja oscilar libremente. Suponiendo que el medio no ofrece ninguna resistencia, obtener la ley del movimiento. Nota: tómese $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Respuesta: $x(t) = x_{eq} + 0.05\cos\sqrt{5}t \text{ (m)}$, siendo $x_{eq} = 2 \text{ m}$.

25. En el caso del problema anterior, suponiendo que el medio ofrece una resistencia proporcional a la primera potencia de la velocidad, $\vec{R} = -c\vec{v}$, siendo $c = 0.2 \text{ Kg s}^{-1}$, se pide:

- Ecuación de movimiento.
- ¿Qué tipo de movimiento amortiguado realiza la partícula?
- Frecuencia angular y factor de calidad.
- Ley del movimiento.

Respuesta: (d) $x(t) = 2 + \exp[-0.125t](0.05\cos\sqrt{4.984}t + 0.0028\text{sen}\sqrt{4.984}t)$.

26. Suponiendo que sobre la partícula del problema anterior actuase, además, una fuerza excitadora $\vec{F}(t) = 15 \cos 2t \vec{i} \text{ N}$, se pide:

- Amplitud del movimiento en el estado estacionario.
- Ley del movimiento en el estado estacionario.
- Si las condiciones iniciales fuesen diferentes, ¿cambiaría el resultado anterior?, ¿por qué?
- ¿Cuál es el valor de la frecuencia de resonancia? ¿Y el de la amplitud máxima?

Respuesta: (a) $A = 16.8 \text{ m}$; (b) $X_E(t) = 2 + 16.8\cos(2t - 0.464) \text{ (m)}$; (d) $\omega_r = 2.23 \text{ rad s}^{-1}$, $A_{max} = 33.6 \text{ m}$.

27. Un oscilador armónico sin rozamiento, con masa m y frecuencia natural ω_0 puede oscilar en el eje OX de unos ejes coordenados fijos. En el instante inicial ($t = 0$) se encuentra en reposo en el origen de coordenadas y se le aplica una fuerza $\vec{F} = F_0\cos\omega t \vec{i}$. Calcular:

- La posición del oscilador en función del tiempo $x(t)$.

- (b) La expresión límite de $x(t)$ cuando ω tiende a ω_0 (siendo $\omega < \omega_0$). Representar gráficamente en este caso $x(t)$.

Respuesta: (a) $x(t) = [F_0/m(\omega_0^2 - \omega^2)](\cos\omega t - \cos\omega_0 t)$.

28. Un oscilador armónico sin rozamiento, con masa $m = 0.8 \text{ kg}$ y frecuencia natural $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$, puede oscilar en el eje OX de unos ejes coordenados fijos, alrededor del origen O . Si se somete a oscilaciones forzadas con una fuerza $F_x = 8\cos 2t \text{ N}$, y sabiendo que en el instante inicial ($t = 0 \text{ s}$) se encuentra en $x(0) = 2 \text{ m}$, dirigiéndose hacia el origen con una velocidad de módulo 1 m/s , ¿cuánto vale la velocidad para $t = 2 \text{ s}$?

Respuesta: 2.07 m/s

29. A partir de la expresión de $A(\omega)$ en el caso del oscilador forzado amortiguado, obtener la frecuencia para la que A es máxima (frecuencia de resonancia), así como la amplitud máxima.

Respuesta: $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$; $A(\omega_r) = F_0/m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$.

30. Obténgase la velocidad para el oscilador forzado amortiguado en el régimen permanente. ¿Para qué valor de la frecuencia externa la amplitud de la velocidad es máxima (*resonancia en velocidad*)?

31. Un padre pasea a su hijo en un cochecito, sobre un suelo que presenta baches cada 30 cm , los cuales provocan oscilaciones verticales del cochecito (supóngase que el sistema cochecito + niño se puede simular por una masa puntual de 32 kg unida a un muelle de constante elástica 2 N/m). Inicialmente la velocidad del cochecito es de 0.5 m/s . Si el padre aumenta la velocidad del cochecito, ¿serán las oscilaciones del cochecito de mayor o menor amplitud?

Nota: supóngase que el oscilador (cochecito+niño) está sometido a una fuerza armónica cuya frecuencia angular es directamente proporcional a la velocidad del cochecito e inversamente proporcional a la distancia entre baches.

32. Un oscilador, caracterizado por una masa $m = 0.5 \text{ kg}$, constante elástica $k = 4 \text{ N/m}$, y coeficiente de rozamiento $c = 0.2 \text{ kg s}^{-1}$, oscila en régimen permanente sometido a la fuerza excitadora $F = 5\cos\omega t \text{ N}$. Obtener, en función de ω , la energía cinética media en un periodo del movimiento, $\langle E_c \rangle(\omega)$. ¿Para qué valor de la frecuencia es máxima $\langle E_c \rangle(\omega)$? ¿Cuánto vale en ese caso la energía cinética media?

Respuesta: 2.83 rad/s ; 78.13 J

Capítulo 7

ONDAS

7.1 Introducción

El estudio de las ondas constituye uno de los temas más apasionantes e importantes de la Física Matemática, dada la relevancia del fenómeno ondulatorio en todas las partes de la Física. Podríamos poner una infinidad de ejemplos de ondas, dentro del campo de la Mecánica, del Electromagnetismo, de la Mecánica Cuántica, etc. Así, el movimiento generado cuando cae una piedra sobre el agua de un estanque revela la propagación de ondas aproximadamente circulares en la superficie, el movimiento de una cuerda de guitarra genera ondas sonoras, las ondas sísmicas, etc, son casos de ondas mecánicas de diversa naturaleza. Dentro del Electromagnetismo, las ondas han jugado un papel fundamental en los avances relacionados con los sistemas de transmisión de información, dada la naturaleza ondulatoria del campo electromagnético en zonas del espacio donde no existen densidades de carga ni corrientes. En Mecánica Cuántica, el estado de un sistema está descrito por una función, denominada *función de onda*; esta función es solución de una ecuación de onda muy conocida: la ecuación de Schrödinger.

Todos estos ejemplos muestran la aparición del fenómeno ondulatorio en situaciones de distinta naturaleza, pero con un denominador común que las caracteriza. Esta característica común, hablando inevitablemente de forma imprecisa, es la propagación de la perturbación o cambio producido en el valor de una cantidad física en alguna zona del espacio. Por ejemplo, en las ondas sonoras se propaga un cambio en la presión que se produce, por ejemplo, cuando hablamos. Las leyes de la Mecánica aplicadas a este caso muestran que dicha perturbación se extiende en el espacio, dando lugar a variaciones de presión y densidad en otros puntos. A esto se le llama onda.

Si bien las oscilaciones se han estudiado dentro del campo de la Mecánica, considerando el modelo sencillo de la partícula unida al extremo de un muelle ideal, en este tema no vamos a estudiar ningún tipo de onda en concreto, sino que analizaremos el movimiento ondulatorio desde un punto de vista general. No obstante, aludiremos en algunas ocasiones a algún ejemplo, tal como el sonido, las ondas electromagnéticas, etc, con el objeto de facilitar la comprensión de los aspectos que se van a desarrollar.

7.2 Las ondas viajeras

En este apartado vamos a introducir matemáticamente el movimiento ondulatorio. Si bien el fenómeno de las ondas es mucho más complejo y rico que la descripción simplificada que vamos a mostrar a continuación, ésta nos permitirá abordar el tema en cuestión desde una perspectiva sencilla en la que se mostrarán algunos de los aspectos más representativos de este fenómeno.

Estamos interesados en describir matemáticamente una situación que se produce en muchos campos de la Física, y que expondremos de la siguiente forma simplificada: en un punto del espacio, que llamaremos *foco* o *fuelle*, se produce una *perturbación*, correspondiente a un cambio en el tiempo en el valor de una magnitud física, tal como la presión, la densidad, el campo eléctrico, etc., y dicha perturbación se *propaga* a otros puntos del espacio en los que se reproduce de forma análoga a como se hizo en el punto inicial, dando lugar al movimiento ondulatorio.

Consideraremos las simplificaciones siguientes:

1. Supondremos que la perturbación se propaga en una dirección. Si llamamos OX a la dirección de propagación, la magnitud física estará representada por una función de x y t . Si la magnitud que se propaga es escalar, estará representada por una función $g(x, t)$; si es un vector, la representaremos por $\vec{g}(x, t) = g(x, t)\vec{u}$, donde \vec{u} es un vector unitario. En el primer caso la onda se denomina *escalar*, y en el segundo, *vectorial*. Por ejemplo, en el caso de las ondas sonoras, y bajo ciertas aproximaciones, la presión (magnitud escalar) se propaga de un punto a otro, así como la densidad del aire (magnitud escalar). Por otro lado, el desplazamiento de los centros de masas de elementos de volumen conteniendo un número de partículas del orden del número de Avogadro, respecto a sus posiciones de equilibrio, se representa mediante una onda vectorial. En el caso de las ondas electromagnéticas, las magnitudes que se propagan son vectores (campos eléctrico y magnético).
2. El valor que tenga g en un punto e instante concretos se trasladará en el eje OX con celeridad constante, que denominaremos *velocidad de propagación*, y que representaremos por la letra v . A las ondas que tengan esta propiedad las denominaremos *ondas viajeras*.

A continuación vamos a averiguar qué tipo de dependencia debe tener g con x y t para que dicha función represente una onda viajera. Consideremos un punto x_1 , donde el valor de la función en el instante t_1 es $g(x_1, t_1)$. Como g se propaga con velocidad constante, $g(x_1, t_1)$ debe ser igual al valor que tomará g en un instante $t > t_1$ en la posición $x = x_1 + v(t - t_1)$ (suponiendo que la onda viaja en el sentido positivo). Por tanto,

$$g(x, t) = g(x_1, t_1) = g(x - vt + vt_1, t_1) \quad ; \quad \forall x, t. \quad (7.1)$$

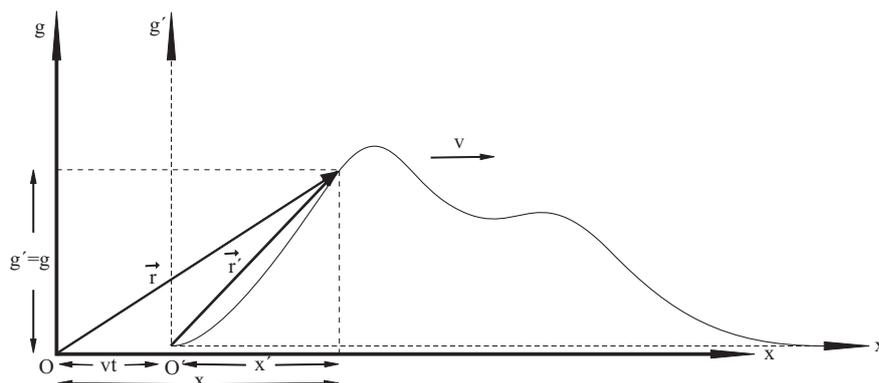


Figura 7.1: Movimiento ondulatorio unidimensional.

Como t_1 puede ser cualquier instante de referencia, vemos que $g(x, t)$ debe ser una función de $x - vt$.

Otra forma de verlo es la siguiente: consideremos dos sistemas de referencia, S y S' , de forma que S' se traslada respecto a S con velocidad constante $v\vec{i}$ ($v > 0$). Para simplificar, supondremos que en $t = 0$ ambos sistemas coinciden, de forma que la distancia entre sus orígenes, O y O' , es vt . Consideremos a continuación una curva C ligada a S' y caracterizada por la relación $g' = f(x')$, la cual se desplaza, por tanto, con velocidad $v\vec{i}$ respecto a S (ver figura 7.1). El movimiento de C respecto a S corresponde a la propagación sobre OX de una onda viajera con velocidad v . Para caracterizar la posición de los puntos de C respecto a S mediante una función $g(x, t)$, la cual describirá el movimiento ondulatorio, sólo tenemos que tener en cuenta que al ser $\vec{r} = \vec{r}' + vt\vec{i}$, entonces $g' = g$, y $x' = x - vt$, de forma que

$$g' = f(x') \quad \rightarrow \quad g = f(x - vt). \quad (7.2)$$

A partir de (7.2) vemos que $g = f(x - vt)$ describe a una curva que se mueve en el eje OX positivo con velocidad constante. Si v va a representar siempre la celeridad, es decir $v > 0$, entonces en el caso de que la curva se moviese en el sentido negativo de OX , la onda viajera vendría descrita por una función

$$g = f(x + vt). \quad (7.3)$$

Otra forma de describirla es mediante una función que dependa de $t - x/v$:

$$f(x - vt) = f\left[-v\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] = F\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

dado que v es una constante. Esto puede verse también teniendo en cuenta que el valor de g en una posición dada es una función del tiempo. Por ejemplo, considerando por simplicidad el origen ($x = 0$), tenemos $g(x = 0, t) = F(t)$. Como C se propaga con velocidad constante, el valor que tomará g en x y t , será igual al que tomó en el origen en el instante $t - x/v$. Por tanto

$$g(x, t) = F\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad (7.4)$$

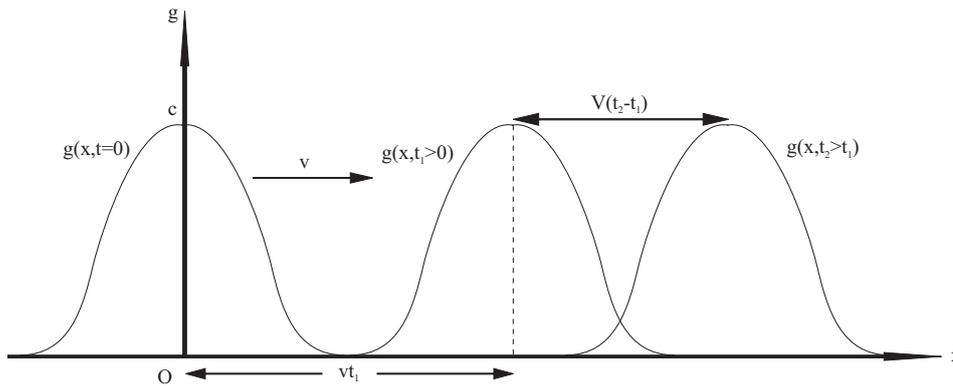


Figura 7.2: Ejemplo de onda viajera.

o $g(x, t) = F(t + x/v)$ en el caso de que C se desplace en el sentido negativo de OX .

En conclusión, $g(x, t) = f(x \pm vt) = F(t \pm x/v)$ son funciones que representan ondas viajeras en el eje OX , propagándose en el sentido positivo (signo negativo), o en el sentido negativo (signo positivo).

Por ejemplo, la función

$$g(x, t) = \frac{c}{1 + \frac{(x-vt)^2}{x_0^2}},$$

es una onda viajera que se desplaza en el sentido positivo. En la figura (7.2) hemos representado $g(x, t)$, en función de x , para distintos valores de t .

7.2.1 Ondas transversales y longitudinales

Las ondas vectoriales se clasifican, según la dirección de \vec{u} , en *longitudinales*, *transversales*, y *mixtas*:

- Ondas longitudinales. Son aquellas en las que \vec{u} es paralelo a la dirección de propagación, es decir

$$\vec{g}(x, t) = f(x - vt)\vec{i}. \quad (7.5)$$

Por ejemplo, en un tubo muy fino en el que se propagan ondas sonoras (ver figura (7.3)), el desplazamiento es paralelo a la dirección de propagación.

- Ondas transversales. Son aquellas en las que \vec{u} es perpendicular a la dirección de propagación. El ejemplo más representativo de una onda transversal es el de las ondas electromagnéticas, en las que los campos eléctrico y magnético oscilan en direcciones perpendiculares a la dirección de propagación.
- Ondas mixtas. También hay ondas que se representan por un vector con una componente transversal y otra longitudinal; por ejemplo, en las ondas que se propagan en la superficie del agua el desplazamiento de las partículas puede descomponerse en una componente paralela a la propagación de la onda, y otra perpendicular a la misma.

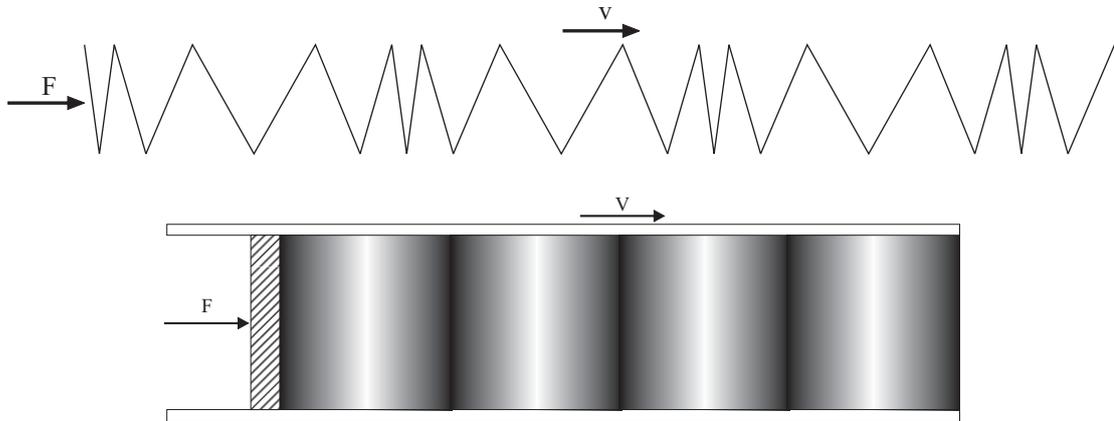


Figura 7.3: Ondas longitudinales (a) en un muelle, y (b) en un gas.

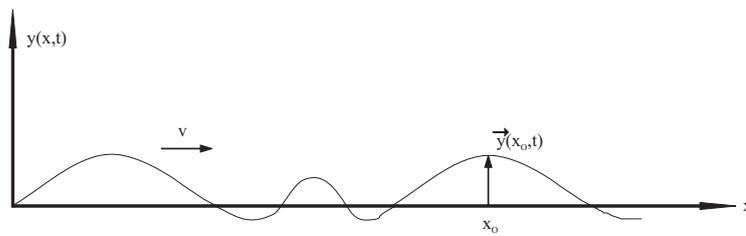


Figura 7.4: Ondas transversales en una cuerda.

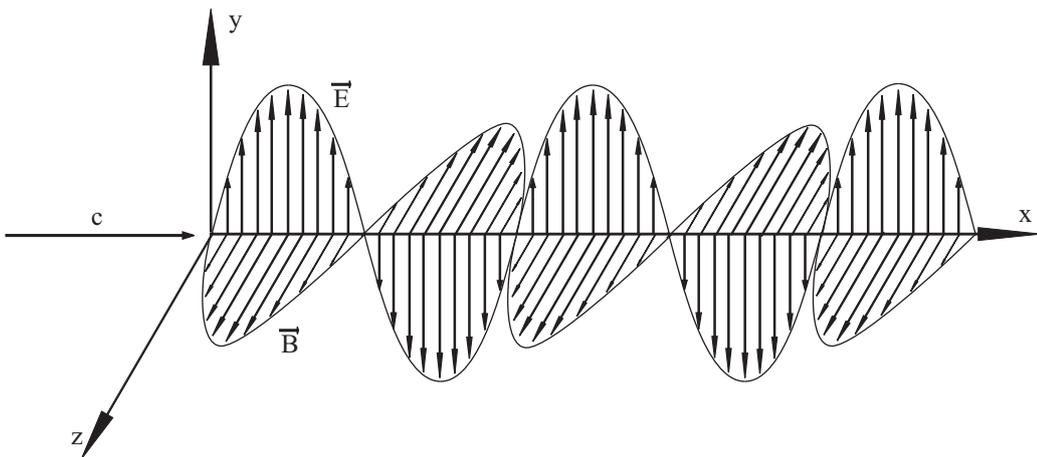


Figura 7.5: Campos eléctrico y magnético en una onda armónica plana.

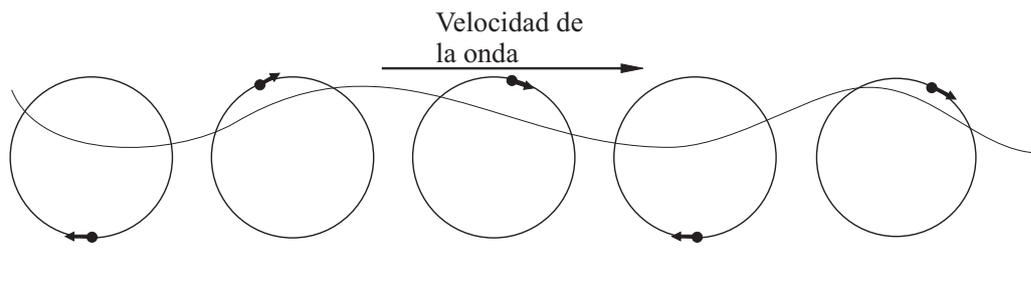


Figura 7.6: Movimiento de las partículas en una onda en el agua. El desplazamiento de cada partícula tiene una componente paralela y otra perpendicular a la dirección de propagación.

7.3 La ecuación de ondas

La descripción que hemos dado en el apartado anterior para una onda viajera unidimensional nos ha servido para acercarnos matemáticamente a un fenómeno que se produce en muchos campos de la Física. Si bien las ecuaciones fundamentales que rigen los fenómenos que se producen en la naturaleza son distintas (ecuaciones de Maxwell del Electromagnetismo, leyes de Newton en la Dinámica, ecuación de Schrödinger en Mecánica Cuántica), las ecuaciones diferenciales que se obtienen al aplicar las leyes fundamentales a determinados problemas son muy similares. Por ejemplo, este fue el caso de la ecuación del oscilador forzado amortiguado; la ecuación diferencial que regía el movimiento de una partícula es la misma que la que describe las oscilaciones de las cargas en un circuito RLC resonante. Lo mismo ocurre con la ecuación que vamos a deducir a continuación, la cual describe la propagación unidimensional de una onda viajera.

Matemáticamente, una onda no es más que una solución a una ecuación diferencial en derivadas parciales ¹ con dos clases de variables independientes: las asociadas al espacio y al tiempo. Podemos ahora preguntarnos cuál es la ecuación de ondas cuyas soluciones son las ondas viajeras (7.2) y (7.3) analizadas en el apartado anterior.

Partiendo de (7.2) ó (7.3) vamos a calcular las derivadas parciales ² de primer y segundo orden de g respecto a x y t , para lo cual aplicaremos la regla de la cadena.

¹La diferencia entre las ecuaciones en derivadas parciales y las ecuaciones diferenciales ordinarias estriba en que la función incógnita depende ahora de varias variables independientes. Por ejemplo, dada una función de dos variables $M(x, z)$, toda relación de la forma

$$h\left(x, z, M, \frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial z}, \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 M}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z}, \dots, \frac{\partial^n M}{\partial z^n}\right) = 0,$$

es una *ecuación en (o entre) derivadas parciales* de orden n .

²La derivada parcial de una función $z = f(x, y)$ respecto a x (y) se obtiene dejando y (x) constante y variando x (y). Por ejemplo, si $z = x^2 + y$ entonces $\partial z / \partial x = 2x$, y $\partial z / \partial y = 1$.

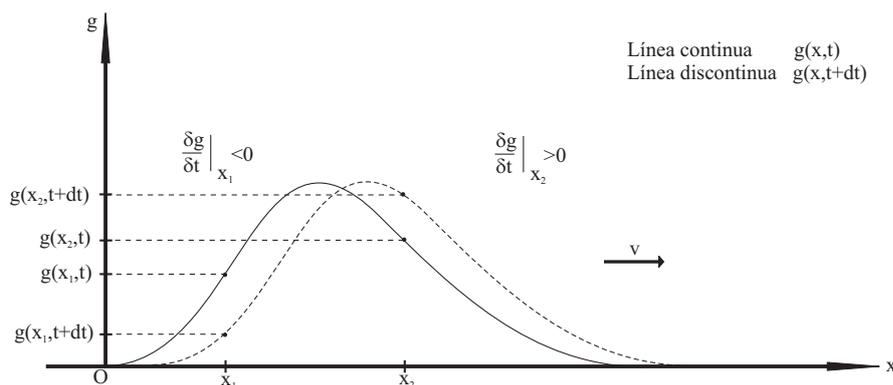


Figura 7.7: Interpretación de la ecuación (7.6).

Llamando $u(x, t) = x \pm vt$ vemos que $g(x \pm vt)$ se convierte en una función de una única variable (u): $g(x \pm vt) = g(u)$. Y teniendo en cuenta que $\partial u / \partial x = 1$ y $\partial u / \partial t = \pm v$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{dg}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dg}{du} ; & \frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{dg}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dg}{du} (\pm v) \\ & & \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} &= \pm \frac{1}{v} \frac{\partial g}{\partial t}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

donde el signo $-$ ($+$) corresponde a ondas que se desplazan en el sentido positivo (negativo) del eje OX . (7.6) representa dos ecuaciones, una para ondas que se desplazan en el sentido positivo de OX (signo “ $-$ ”), y otra para ondas que se desplazan en el sentido negativo (signo “ $+$ ”). Es fácil dar una interpretación geométrica al signo que aparece en la ecuación (7.6). Por ejemplo, si la onda se desplaza en el sentido positivo, las derivadas parciales respecto a x y respecto a t tienen signos distintos, y esto es inmediato si tenemos en cuenta que la onda viajera representa una curva moviéndose a velocidad constante sobre OX . En la figura (7.7) hemos representado una onda en un instante t , en función de x . En x_1 la función es creciente (derivada con respecto a x positiva), lo que implica que al desplazarse la curva el valor de la función en x_1 va a ser menor (derivada con respecto a t negativa). Lo contrario ocurre en el punto x_2 , donde la derivada con respecto a x es negativa, lo que implica que la función crecerá en x_2 al desplazarse la curva (derivada con respecto a t positiva).

Con el objeto de obtener una ecuación que se verifique tanto para ondas viajeras en el sentido positivo, como para ondas viajando en el sentido negativo de OX , calcularemos las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dg}{du} \right) = \frac{d}{du} \left(\frac{dg}{du} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2 g}{du^2}. \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\pm v \frac{dg}{du} \right) = \frac{d}{du} \left(\pm v \frac{dg}{du} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = (\pm v) \frac{d^2 g}{du^2} (\pm v) = v^2 \frac{d^2 g}{du^2}. \quad (7.8)$$

Teniendo en cuenta (7.7) y (7.8) llegamos a la siguiente relación entre las derivadas parciales de segundo orden de g respecto a x y t :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}, \quad (7.9)$$

ecuación diferencial en derivadas parciales que recibe el nombre de *ecuación de ondas*. Por tanto, cualquier función de la forma $g = f(x \pm vt)$ es solución de (7.9).

7.3.1 Principio de superposición

Una de las características más importantes de la ecuación de ondas es su linealidad³. Consecuencia directa de este carácter lineal es el principio de superposición:

“Cualquier combinación lineal de la forma $G = \sum_i g_i(x \pm vt)$ es solución de la ecuación de ondas.”

Tenemos

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \sum_i \frac{\partial^2 g_i}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \sum_i \frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2}.$$

Entonces,

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \sum_i \left(\frac{\partial^2 g_i}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2} \right) \equiv 0. \quad (7.10)$$

Es decir, G verifica la ecuación de ondas. Obsérvese que en (7.10) el sumatorio se anula idénticamente porque cada sumando es idénticamente nulo, ya que g_i , al ser una onda viajera, verifica la ecuación (7.9).

Reagrupando los términos que se desplazan en el sentido positivo y los que se desplazan en el sentido negativo, vemos que la solución general de (7.9) puede expresarse como:

$$g(x, t) = G_1(x - vt) + G_2(x + vt). \quad (7.11)$$

Por tanto, el conjunto de soluciones de la ecuación (7.9) es mucho más rico que las ondas viajeras, puesto que (7.11) ya no es una onda viajera (a no ser que G_1 o G_2 sean nulas). Dicho de otro modo, toda onda viajera es solución de la ecuación de ondas, pero toda solución de la ecuación de ondas no es una onda viajera.

Condiciones iniciales

Cuando estudiamos el oscilador armónico vimos que la solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden se expresa a partir de dos constantes “libres”, cuyo valor se puede determinar, por ejemplo, conociendo el valor de la función y su primera derivada para un valor dado de la variable independiente. Así, en el caso del

³Una ecuación diferencial se denomina *lineal* cuando su primer miembro es una combinación lineal (con coeficientes que pueden ser constantes o funciones de las variables independientes) de la función incógnita y sus derivadas.

oscilador armónico, la posición y velocidad iniciales permiten conocer la amplitud y la fase inicial.

El estudio de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales es más complejo que el correspondiente a las ecuaciones diferenciales ordinarias, y por tanto no vamos a adentrarnos en la resolución de este tipo de ecuaciones. No obstante, un análisis sencillo nos permitirá comprender la necesidad de ciertas condiciones que permitan determinar una solución específica a la ecuación de ondas. Para ello, sólo tenemos que tener en cuenta que cualquier superposición de ondas viajeras es solución de dicha ecuación, por lo que se necesitan ciertas condiciones que permitan obtener, para un problema concreto, la solución de forma unívoca. Una forma es mediante las condiciones iniciales:

1. El conocimiento de la función en un instante dado para cualquier valor de x . Por ejemplo, en el instante $t = 0$,

$$g(x, 0) = a(x). \quad (7.12)$$

2. Y el conocimiento de la derivada parcial de g con respecto al tiempo en un instante dado, para cualquier valor de x . Tomando $t = 0$,

$$\left. \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0} = b(x). \quad (7.13)$$

El conocimiento de $a(x)$ y $b(x)$ permite obtener unívocamente $g(x, t)$.

7.4 Ondas periódicas

Una onda periódica es una onda $g = f(x - vt)$, cuya dependencia temporal en cada punto es periódica. Es decir,

$$f(x - vt) = f[x - v(t + nT)] \quad ; \quad n \in Z, \quad (7.14)$$

donde T es el periodo del movimiento oscilatorio.

La existencia de periodicidad en el tiempo implica a su vez periodicidad en el espacio, y viceversa, de forma que una onda periódica lo es tanto en el espacio como en el tiempo. Para verlo partiremos de (7.14). Como el valor de g se repite en un punto cada T unidades de tiempo y la onda representa una función que viaja a velocidad constante v , esto implica que el valor de g debe ser el mismo cuando la posición se incrementa en nvT , siendo n cualquier número entero. Esto último puede verse directamente a partir de (7.14), sin más que llamar $x' = x - nvT$. Tenemos,

$$f(x - vt) = f(x' - vt), \quad (7.15)$$

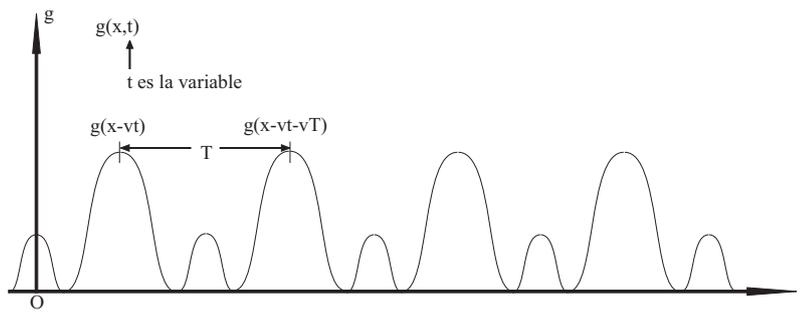


Figura 7.8: Representación de una onda periódica en función del tiempo, para una posición determinada. La periodicidad está caracterizada por un periodo temporal T .

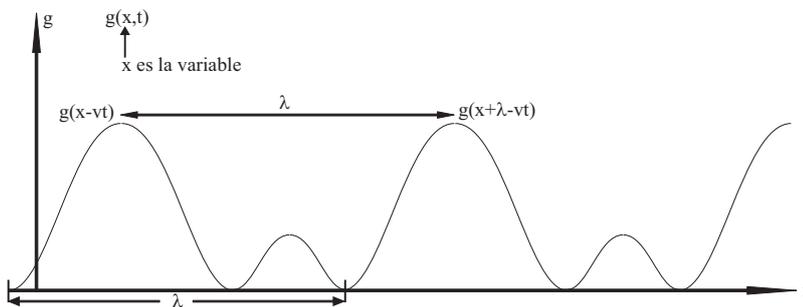


Figura 7.9: Representación de una onda periódica en un instante concreto, en función de la posición. La periodicidad espacial está caracterizada por la longitud de onda $\lambda = vT$, siendo v la velocidad de propagación, y T el periodo temporal.

para todo $x' = x - nvT$. Por tanto, dado un instante cualquiera t , el valor que adopta la onda en x' , separado de x una cantidad nvT , es el mismo. A la cantidad vT se la denomina *longitud de onda*, y la representaremos de ahora en adelante por la letra λ . De esta forma, para caracterizar a una onda periódica hacen falta dos cantidades: su velocidad v , y el periodo T , o la longitud de onda λ , pues estas cantidades verifican la relación $\lambda = vT$.

Nótese finalmente que en las ondas periódicas el periodo tiene un doble significado: por un lado, T representa al movimiento periódico en cada punto del espacio; por otro lado, T es el tiempo que transcurre al desplazarse la onda en el espacio una longitud de onda. Análogamente, la frecuencia tiene también un doble sentido: por un lado representa las oscilaciones por unidad de tiempo en un punto fijo, y por otro el número de longitudes de onda que se desplaza la onda, por unidad de tiempo.

7.4.1 Ondas armónicas

Por definición, una *onda armónica* es una función $g(x, t)$ de la forma

$$g(x, t) = A \cos[k(x - vt) + \phi]. \quad (7.16)$$

A se denomina *amplitud* y k *número de onda*, el cual tiene dimensiones de inversa de longitud ⁴. La función

$$\Phi(x, t) = k(x - vt) + \phi,$$

es la *fase* del movimiento ondulatorio, de forma que ϕ es la fase correspondiente a $x = 0$ y $t = 0$.

Otra forma de expresar una onda armónica es mediante una función seno, o a partir de la suma de un seno y un coseno, como vimos al estudiar el movimiento armónico simple.

A partir de (7.16) se pueden obtener la longitud de onda y el periodo del movimiento ondulatorio armónico. Por ejemplo, para hallar λ sólo tenemos que tener en cuenta que cuando el argumento del coseno (la fase) se incrementa en 2π , su valor es el mismo. Esto se consigue incrementando x en $2\pi/k$, de forma que

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (7.17)$$

Por otro lado, como $\lambda = vT$, tenemos:

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2\pi}{kv}. \quad (7.18)$$

Nótese que, fijado x , el movimiento $g(x, t)$ es armónico simple con un periodo $T = 2\pi/kv$, y una frecuencia angular $\omega = kv$. La *frecuencia* del movimiento ondulatorio será por tanto $\nu = 1/T$. Dicha cantidad corresponde, tanto a la frecuencia del MAS en un punto, como al número de longitudes de onda que pasan por un punto en la unidad de tiempo.

Otras formas de expresar (7.16) a partir de las cantidades que hemos obtenido, son:

$$g = A \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \phi\right], \quad (7.19)$$

$$g = A \cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \phi\right], \quad (7.20)$$

$$g = A \cos(kx - \omega t + \phi). \quad (7.21)$$

Antes de terminar este apartado hemos de señalar que la velocidad de propagación, v , en el caso de las ondas armónicas, suele recibir el nombre de *velocidad de fase*. Es la velocidad a la que debe moverse un sistema de referencia (ligado a la onda) para que éste no observe ninguna variación temporal en la fase.

⁴Nótese que el argumento del coseno debe ser una cantidad adimensional. De ahí que hayamos multiplicado $x - vt$ por k .

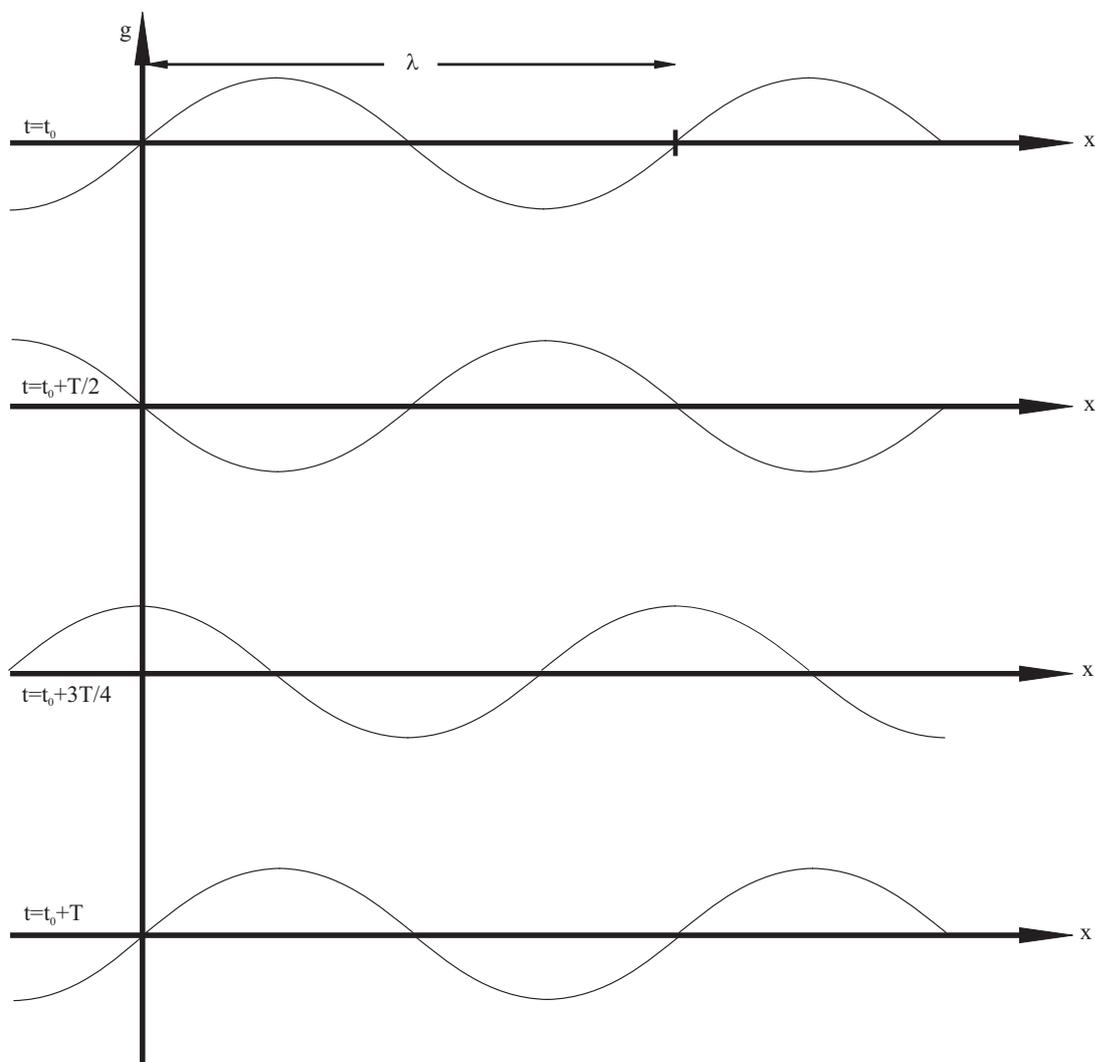


Figura 7.10: Onda armónica propagándose hacia la derecha. La onda recorre una longitud de onda λ en un intervalo de tiempo T .

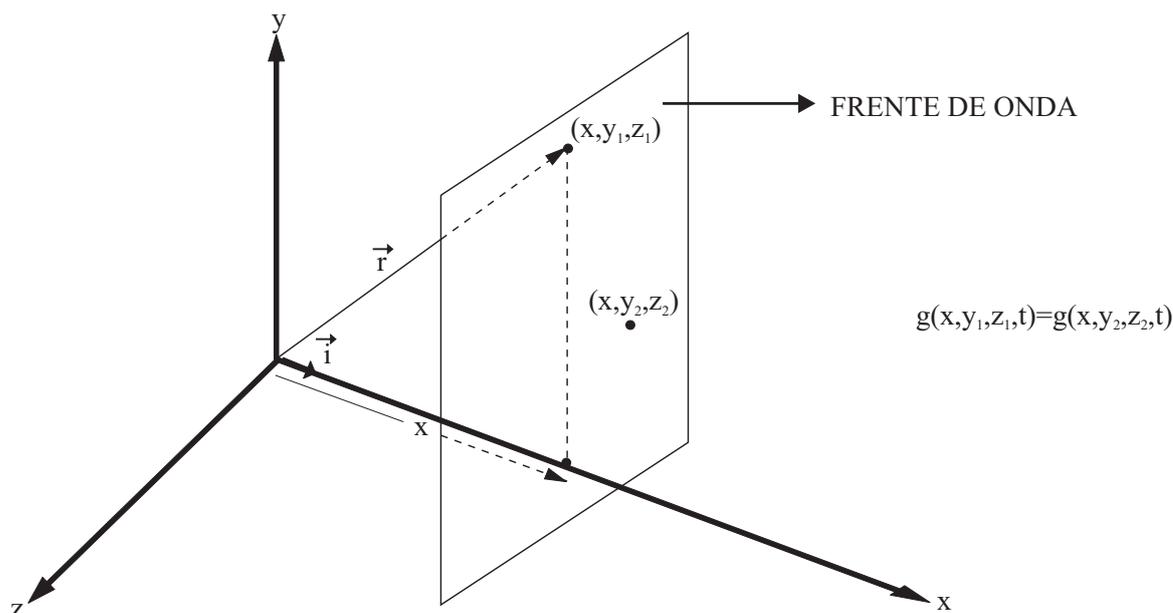


Figura 7.11: Onda plana propagándose en el sentido positivo del eje OX .

7.5 Ondas en tres dimensiones

7.5.1 Ondas planas

Hasta ahora hemos estudiado el movimiento ondulatorio en una dimensión, caso para el que dedujimos la ecuación de ondas (7.9). Vimos que las soluciones de dicha ecuación eran de la forma

$$g(x, t) = G_1(x - vt) + G_2(x + vt), \quad (7.22)$$

donde G_1 (G_2) representa a una onda viajera moviéndose según el sentido positivo (negativo) del eje OX .

Nótese que podríamos considerar la situación descrita por (7.22) como el ejemplo de la propagación en el espacio de una onda caracterizada porque todos los puntos de planos perpendiculares al eje OX (paralelos al plano $x = 0$) tienen el mismo valor de g , que en este caso sería una función de las tres coordenadas y el tiempo. Es decir,

$$g(x, y, z, t) = G_1(x - vt) + G_2(x + vt). \quad (7.23)$$

siendo g independiente de z y de y . A los planos paralelos al $x = 0$, caracterizados porque el valor de g es el mismo en todos sus puntos, se les denomina *frentes de onda*, y a la onda descrita por (7.23), *onda plana* (figura 7.11).

Nótese que lo característico de una onda plana es su dirección de propagación. Por ejemplo, una onda plana propagándose en el sentido positivo del eje OX puede expresarse como

$$g(x, y, z, t) = G(\vec{r} \cdot \vec{v} - vt), \quad (7.24)$$

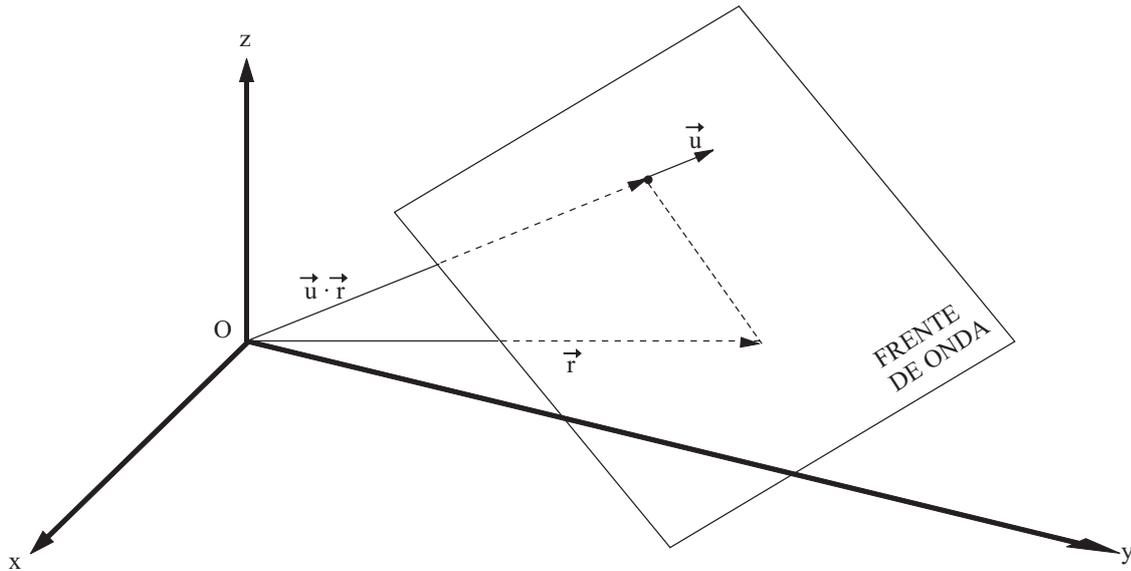


Figura 7.12: Onda plana propagándose según una dirección \vec{u} . La distancia entre el frente de onda y el origen viene dada por el valor absoluto del producto escalar de \vec{u} y \vec{r} .

donde hemos tenido en cuenta que $\vec{r} \cdot \vec{i} = x$.

En el caso de que la onda plana se propague en la dirección y sentido del vector unitario $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$, los frentes de onda son planos perpendiculares a \vec{u} , y la onda viene descrita por la función⁵:

$$g(x, y, z, t) = G(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt) = G(u_x x + u_y y + u_z z - vt). \quad (7.25)$$

A \vec{u} se le denomina *vector de propagación* (ver figura 7.12).

En las ondas planas la propagación se describe mediante el movimiento de los frentes de onda, los cuales viajan con velocidad constante. Cada frente tiene asignado un valor de la onda, de tal modo que el movimiento de los frentes corresponde al desplazamiento de los valores que los representan. Para entender esto último de una forma más rigurosa, téngase en cuenta que $g(x, y, z; t) \equiv G(\xi)$, siendo $\xi = u_x x + u_y y + u_z z - vt$. Así, la ecuación $u_x x + u_y y + u_z z - vt = cte$ representa un “plano viajero”, cuya distancia al origen, $|\vec{u} \cdot \vec{r}| = |u_x x + u_y y + u_z z|$ depende linealmente del tiempo.

7.5.2 Ondas armónicas planas

La expresión general de onda armónica plana propagándose en la dirección y sentido de \vec{u} , es:

$$g(\vec{r}, t) = A \cos[k(\vec{u} \cdot \vec{r} - \omega t) + \phi] = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi), \quad (7.26)$$

⁵Ejercicio: demostrar que cualquier función cuyo único argumento sea una combinación lineal de x , y , z y t , es una onda plana. Es decir: si $g(x, y, z, t) \equiv f(w)$, siendo $w = ax + by + cz + dt$, con a , b , c y d constantes, demostrar que g es una onda plana. ¿Cuánto vale v ?, ¿y \vec{u} ?

donde se define el *vector de onda* $\vec{k} = k\vec{u}$, cuyo módulo es el número de onda $2\pi/\lambda$, y su dirección y sentido son los de \vec{u} . Teniendo en cuenta que $\omega = |\vec{k}|v$, las componentes del vector de onda verifican:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2}. \quad (7.27)$$

7.5.3 La ecuación general de ondas

A partir de (7.25), y siguiendo un proceso similar al que se llevó a cabo para obtener la ecuación de ondas en una dimensión, se puede demostrar que cualquier onda plana verifica la ecuación ⁶:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}, \quad (7.28)$$

que recibe el nombre de *La ecuación de ondas*. Nótese que (7.9) es un caso particular de (7.28) para el caso en que g sólo depende de una variable.

Realmente, al denominar *ecuación de ondas* a (7.9) (o a (7.28)) hay un abuso de lenguaje, porque ecuaciones de ondas hay muchas; lo que ocurre es que la ecuación (7.28) (o (7.9)) representa el comportamiento ondulatorio de las magnitudes físicas en un conjunto tan extenso de fenómenos, y de distinta naturaleza física, que merece una atención especial en el estudio de las ondas. Es decir, es el carácter ubíquo de esta ecuación el que le confiere tanta importancia en la Física⁷. Pongamos dos ejemplos de esto. Si partimos de las ecuaciones de Maxwell en el espacio vacío, con el objeto de conocer cómo se comporta el campo electromagnético en regiones donde no existen fuentes de campo (cargas), se llega a una ecuación que coincide con (7.9) para cada una de las componentes del campo eléctrico:

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} \quad ; \quad i = x, y, z, \quad (7.29)$$

y ecuaciones similares se tienen para las componentes del campo magnético⁸.

Cambiemos ahora de campo, y dirijámonos a la Mecánica y la Termodinámica. La ecuación que gobierna la propagación del sonido en el aire, o dicho de otro modo, las variaciones de presión respecto a la presión atmosférica, cuando se produce una

⁶Hacer como ejercicio.

⁷Esa es la mitad de la verdad. La otra mitad es que es la ecuación en derivadas parciales de segundo orden de tipo hiperbólico más simple que se pueda encontrar.

⁸Históricamente, el primero en obtener (7.29) fue James Maxwell, dándose cuenta de que era la ecuación de ondas. En realidad él obtuvo (7.29) con c expresada en términos de la permitividad eléctrica del vacío, ϵ_0 , y de la permeabilidad magnética del vacío, μ_0 :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Cuando Maxwell dio valores numéricos experimentales a ϵ_0 y μ_0 obtuvo un valor de c enorme, y tuvo el atrevimiento de identificar/interpretar las ondas electromagnéticas con la luz. Un acierto digno de un genio.

perturbación del aire en cierta zona del espacio, por ejemplo cuando hablamos, es una ecuación formalmente idéntica a (7.28) cuando se verifican ciertas condiciones que no vamos a tratar aquí. Es decir,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (7.30)$$

donde p es la variación de presión y v es la velocidad del sonido, la cual depende del estado del aire:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \quad (7.31)$$

siendo γ la constante de expansión adiabática de los gases que en el caso del aire es igual a 1.4, R la constante de los gases ideales, T la temperatura absoluta, y M la masa molecular del aire, que es igual a 29 g/mol . Si calculamos v para una temperatura de 25°C se obtiene una velocidad de 346 m/s .

Los ejemplos anteriores muestran la importancia de la ecuación de ondas y nos sirven de ejemplo para enfatizar el papel que algunas ecuaciones tienen en la Física. Otro ejemplo similar lo hemos encontrado en el tema de oscilaciones, con la ecuación del oscilador armónico.

Por último, si bien (7.28) se ha obtenido para el caso de una onda plana, hemos de llamar la atención sobre un punto muy importante: como la ecuación de ondas es lineal, cualquier superposición de ondas planas desplazándose con velocidad v es una solución de la ecuación de ondas. Ahora bien, sumando ondas planas con diferentes vectores de propagación se pueden obtener funciones muy distintas de las propias ondas planas. Por ejemplo, podemos decir que la función

$$g(\vec{r}, t) = \sum_i A_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} \pm \omega_i t + \phi_i) \quad ; \quad \omega_i = |\vec{k}_i|v,$$

es una solución de la ecuación de ondas⁹; lo cual guarda una estrecha relación con el *teorema de Fourier*, que el alumno estudiará en cursos más avanzados.

7.5.4 Ondas esféricas

Para poner un ejemplo concreto de ondas que verifican (7.28) pero no son ondas planas, hablaremos brevemente sobre las ondas esféricas. Consideremos el caso de una perturbación que se produce en un punto y se transmite de forma isótropa, es decir, igualmente en todas las direcciones del espacio que parten de dicho punto. Por ejemplo, cuando en un punto de un fluido homogéneo e isótropo, inicialmente en equilibrio, se produce una variación de la presión, dicha variación se propaga igualmente en todas las direcciones, dando lugar a ondas sonoras esféricas. Los frentes de onda son esferas con centro en el punto donde se originó la perturbación.

⁹Demuéstrese esto como ejercicio.

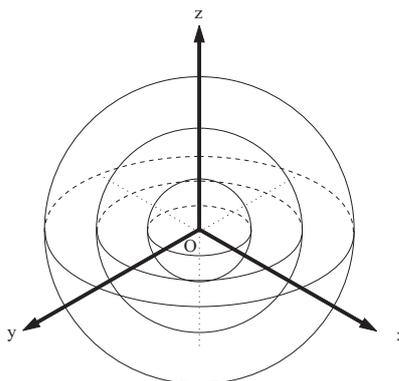


Figura 7.13: Ondas esféricas. Los frentes de onda son esferas concéntricas en el origen. La propagación viene descrita por una función $g(r, t)$.

Supongamos, por ejemplo, que la perturbación se produce en el origen de un sistema de referencia $OXYZ$, y se propaga con la misma celeridad v en todas las direcciones. En tal caso, el valor de la onda en cualquier punto del espacio y en cualquier instante, $g(x, y, z, t)$, debe depender espacialmente tan sólo de la distancia r del punto al origen, es decir

$$g(x, y, z; t) = g(r, t) \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (7.32)$$

Se puede demostrar, aunque no vamos a hacerlo, que la solución a la ecuación de ondas (7.28) en el caso de que la función sólo dependa espacialmente de la distancia al origen r , se puede expresar de la forma siguiente:

$$g(r, t) = \frac{1}{r}F_1(r - vt) + \frac{1}{r}F_2(r + vt), \quad (7.33)$$

donde F_1/r y F_2/r representan ondas esféricas (es decir, ondas cuyos frentes de onda son esferas) alejándose y acercándose a O respectivamente. La diferencia fundamental con (7.23) radica en la existencia del factor $1/r$, el cual hace que el valor de la función decrezca con la inversa de la distancia.

Por ejemplo, la expresión de una *onda armónica esférica* alejándose del origen es

$$g(r, t) = \frac{A}{r} \cos[kr - \omega t + \phi].$$

La amplitud de la onda $A(r) = A/r$ decae con el inverso de la distancia al origen. En un instante concreto, la distancia $\lambda = 2\pi/k$ separa dos frentes de onda consecutivos cuyas fases se diferencian en 2π (y por tanto el valor del coseno es el mismo), aunque el valor de la onda es distinto por el factor $1/r$ que aparece en la amplitud de la onda.

El siguiente ejemplo es una muestra del sentido físico del tipo de dependencia con r y con t de una onda esférica: supongamos una fuente de ondas electromagnéticas, por ejemplo, una fuente de luz, tal como una bombilla, o el propio sol. Supongamos

que el medio no absorbe energía, y que la fuente emite energía a un ritmo constante P_0 (energía emitida por unidad de tiempo), y de forma estacionaria (es decir, que P_0 es constante). Por ser el medio no absorbente, P_0 es la energía por unidad de tiempo que atraviesa a cualquier superficie cerrada que contenga a la fuente. Si el medio es isótropo, entonces la energía por unidad de tiempo que atraviesa a un elemento de área A , tomado sobre una esfera concéntrica con la fuente, es independiente de su ubicación y de su forma (sobre la misma esfera). Por tanto, la energía por unidad de tiempo que atraviesa la unidad de superficie es, para una esfera de radio r :

$$I = \frac{P_0}{4\pi r^2}. \quad (7.34)$$

I recibe el nombre de intensidad, y en el sistema internacional se mide en W/m^2 . Nótese que la intensidad disminuye como la inversa del cuadrado de la distancia al foco emisor. Por ello, cuanto más lejos nos encontramos de una fuente de luz, menor es la intensidad que nos llega. En el caso del sonido, cuanto más lejos estamos de una fuente sonora, menor es la intensidad del sonido que percibimos.

Nótese que la intensidad de las ondas esféricas luminosas decae como $1/r^2$, pero sin embargo hemos obtenido una dependencia $1/r$ para la amplitud de una onda armónica esférica. Ello es debido a que, en el caso de las ondas electromagnéticas, la intensidad es proporcional al cuadrado del módulo del campo eléctrico, de manera que el campo decae como $1/r$.

7.6 El efecto Doppler

Sea F una fuente puntual de ondas periódicas ¹⁰ cuya velocidad de fase con respecto al medio en que se propagan es v . Vamos a llamar Σ a un sistema de referencia ligado al medio ¹¹. Definiremos al observador del movimiento ondulatorio, por un punto O que recibe los frentes de onda emitidos por F (figura 7.14). Si F y O están en reposo respecto al medio, la frecuencia percibida por O , es decir, la frecuencia con que los frentes de onda pasan por O , es la misma que corresponde a la emisión de F . La situación cambia si la fuente, el observador, o ambos, se mueven respecto al medio; en este caso, la frecuencia percibida por O es en general diferente de la de emisión, produciéndose un fenómeno conocido como *efecto Doppler* ¹².

¹⁰Por fuente de ondas periódicas entendemos un punto donde una cierta magnitud física oscila periódicamente, y dicha oscilación se transmite en el espacio a velocidad constante dando lugar a ondas viajeras periódicas.

¹¹Por ejemplo, las ondas sonoras se propagan en medios materiales. Las ondas electromagnéticas pueden propagarse en cualquier medio, incluido el vacío. Para tratar el problema de una forma general el medio va a estar caracterizado por un sistema de referencia Σ .

¹²El efecto Doppler fue observado por primera vez en las ondas sonoras por el físico C.J. Doppler (1803-1853). El razonamiento que hacemos en este apartado no considera ningún tipo de ondas en especial. Lo único que se necesita para que ocurra este fenómeno es un punto que emita ondas periódicas. Ni siquiera tienen por qué considerarse estas ondas demasiado clásicamente. Basta que la fuente emita “cosas” que se propagan con determinada velocidad, y son recepcionadas por el



Figura 7.14: Esquema básico para analizar el efecto Doppler. Trabajaremos en el plano que contiene a la fuente y al observador, y por simplicidad consideraremos que F y O se mueven según la línea que los une. El vector unitario \vec{i} del sistema de referencia ligado al medio se ha tomado paralelo a dicha dirección y en el sentido que va de la fuente al observador.

En lugar de considerar la situación general en que la fuente y el observador pueden moverse en cualquier dirección, supondremos por simplicidad que sus velocidades se encuentran en la línea que une ambos puntos. Llamaremos λ , T , y ν_F a la longitud de onda, el periodo y la frecuencia de las ondas que emite F , y $\vec{v}_F = v_F \vec{i}$ y $\vec{v}_O = v_O \vec{i}$ a las velocidades de la fuente y el observador respecto a Σ . Supondremos la situación más común en la que $|v_F|$ y $|v_O|$ son menores que v (velocidad de propagación respecto al medio).

Vamos a estudiar primero la situación en que la fuente se mueve y el observador está en reposo y, más adelante, la correspondiente al movimiento de ambos.

(a) **Primera situación: fuente en movimiento y observador en reposo** ($v_F \neq 0$, $v_O = 0$).

En este caso, los frentes de onda emitidos por F estarán más próximos en el sentido de movimiento de F , y más distanciados en el sentido opuesto. Por tanto, la longitud de onda respecto al medio disminuye en el sentido de movimiento y aumenta en el sentido opuesto (figura 7.15). Para hacer un análisis cuantitativo supondremos que en $t = 0$ la fuente emite un frente de onda, lo cual vuelve a repetirse cuando $t = T, 2T, \dots, nT$. Cuando la fuente emite el segundo frente de onda ha recorrido una distancia $v_F T$ en la dirección del movimiento, de forma que la distancia entre el frente de onda emitido en $t = T$ y el emitido en $t = 0$, es $\lambda - v_F T$ (ver figura 7.15). Como esta situación se repite con el siguiente frente de onda y así indefinidamente, y los frentes de onda viajan a velocidad v , concluimos que la longitud de onda cuando F está en movimiento es

$$\lambda' = \lambda - v_F T, \quad (7.35)$$

observador. Por ejemplo, el efecto Doppler es perfectamente aplicable al caso en que la fuente es una ametralladora, y el observador es el "blanco" de la misma.

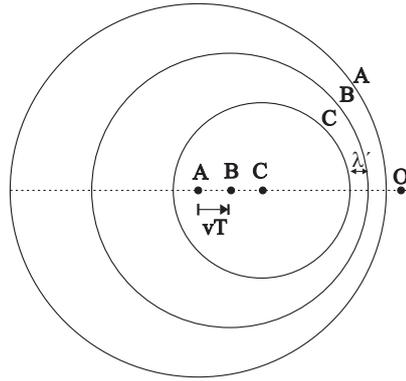


Figura 7.15: Alteración de la longitud de onda debida al movimiento de la fuente. En la figura se muestran ondas circulares en un plano, u ondas esféricas en el espacio correspondiendo la situación de la figura a uno de los planos que contiene a la fuente y al observador.

expresión que es válida tanto para la contracción en la dirección del movimiento ($v_F > 0 \rightarrow \lambda' < \lambda$), como para la dilatación en el sentido opuesto al del movimiento ($v_F < 0 \rightarrow \lambda' > \lambda$). Teniendo en cuenta que $\lambda = v/\nu_F$, $T = 1/\nu_F$, y que $\lambda' = v/\nu_O$, donde hemos llamado ν_O a la frecuencia que percibe el observador, tenemos

$$\frac{v}{\nu_O} = \frac{v}{\nu_F} - \frac{v_F}{\nu_F} \rightarrow \nu_O = \nu_F \frac{v}{v - v_F}, \quad (7.36)$$

expresión que nos indica el valor de la frecuencia percibida por O cuando F está en movimiento. Si $v_F > 0$ ($v_F < 0$), entonces $\nu_O > \nu_F$ ($\nu_O < \nu_F$).

(b) **Segunda situación (general): fuente y observador en movimiento** ($v_F \neq 0$, $v_O \neq 0$).

Supongamos la situación general en la que la fuente y el observador se mueven respecto al medio. Debido al movimiento de la fuente la longitud de onda tiene un valor dado por (7.35). Por otro lado, si el observador también está en movimiento, éste verá los frentes de onda moverse con mayor (menor) velocidad si se acerca (aleja) a (de) la fuente. La velocidad de los frentes de onda respecto al observador será $v - v_O$ ¹³, y la frecuencia observada por O será por tanto el cociente entre la velocidad con que los frentes se mueven respecto a él, y la longitud de onda, cuyo valor viene dado por (7.35). Es decir:

$$\nu_O = \frac{v - v_O}{\lambda'} = \frac{v - v_O}{vT - v_FT} = \nu_F \frac{v - v_O}{v - v_F}.$$

Otra forma de llegar al resultado anterior es: supongamos que en $t = 0$ el observador recibe un frente de onda. El tiempo que tarda el siguiente frente en

¹³Nótese que si el observador se acerca a la fuente v_O es negativa, de forma que $v - v_O$ es mayor que v . Si, por el contrario, el observador se aleja de la fuente, entonces v_O es positiva y $v - v_O$ es menor que v .

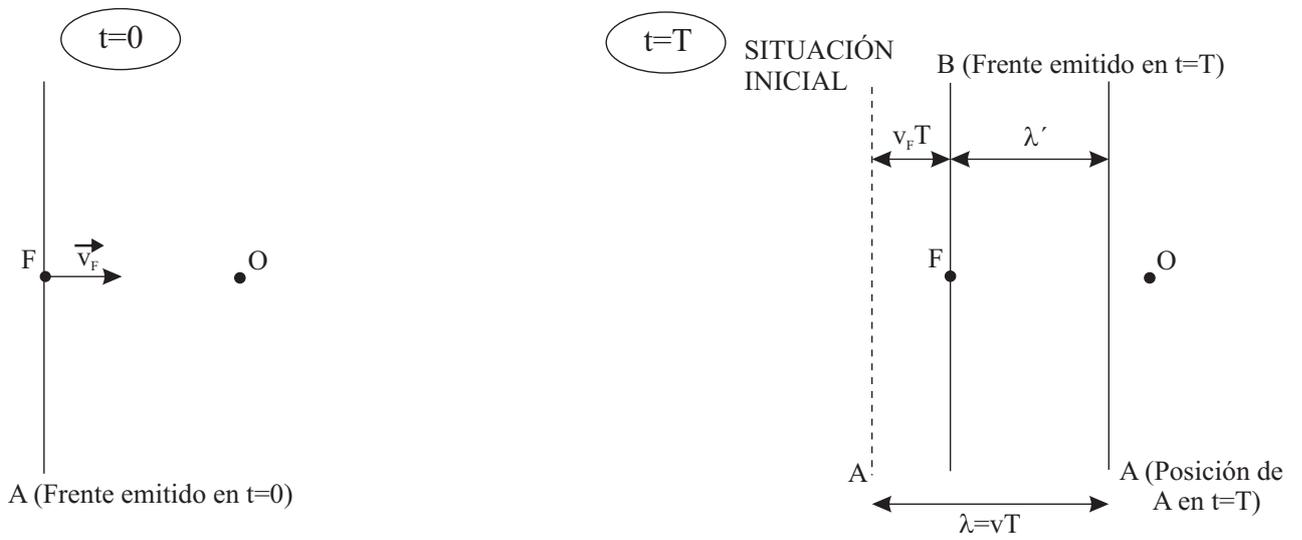


Figura 7.16: Análisis del caso en que F se mueve respecto al medio, estando el observador en reposo.

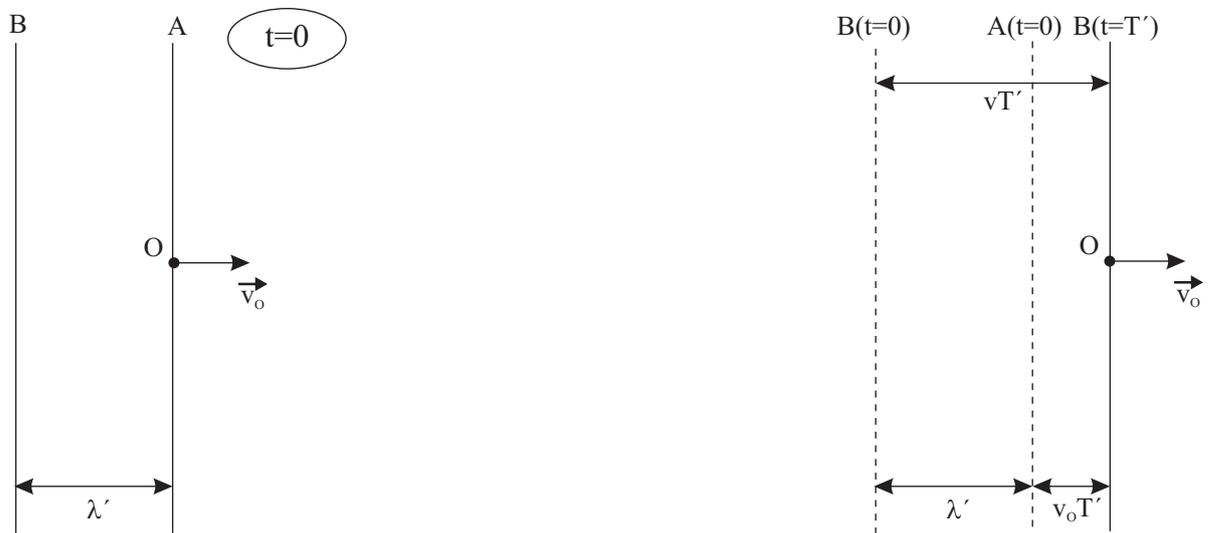


Figura 7.17: Análisis del caso en que se mueve el observador, sea cual sea el movimiento de la fuente.

alcanzarlo será igual al periodo de las ondas percibido por O , al que llamaremos $T' = 1/\nu_O$. Por otro lado, T' será igual al tiempo en que este frente de onda (moviéndose a velocidad v), recorre una distancia $\lambda' + v_O T'$ (figura 7.17). Por tanto, tenemos

$$T' = \frac{\lambda' + v_O T'}{v} \rightarrow (v - v_O) \frac{1}{\nu_O} = \lambda'.$$

Teniendo en cuenta que λ' viene dada por (7.35) y realizando operaciones sencillas, llegamos a

$$\nu_O = \nu_F \frac{v - v_O}{v - v_F}, \quad (7.37)$$

expresión que es válida sean cuales sean las velocidades y sentido del movimiento de F y O .

7.6.1 Ondas de Mach o de choque

Por último analizaremos la situación en que la fuente se mueve a una velocidad mayor que la velocidad de fase de las ondas. Consideraremos que el observador está en reposo respecto al medio. Si $v_F > v$, los frentes de onda emitidos por F viajan a menor velocidad que la propia fuente. Por ejemplo, si en $t = 0$ la fuente se encuentra en un punto A y emite un frente de ondas (figura 7.18), después de un tiempo t la fuente habrá recorrido un espacio $v_F t$, y el frente de onda una distancia vt menor que la anterior. Sea α el ángulo formado por AF y AB (B es el punto de contacto entre el frente de onda emitido por F en $t = 0$ y la recta tangente a dicho frente que pasa por F en el instante t). El seno de α es:

$$\text{sen} \alpha = \frac{vt}{v_F t} = \frac{v}{v_F}. \quad (7.38)$$

Si en $t_1 < t$ la fuente emitió otro frente de onda desde una posición intermedia A' , el espacio recorrido por el frente de onda entre t_1 y t es $v(t - t_1)$, y el recorrido por la fuente es $v_F(t - t_1)$. Como los espacios recorridos son proporcionales a las velocidades, el ángulo entre $A'F$ y $A'B'$ será también α . Esto ocurrirá para todos los frentes emitidos entre 0 y t , de forma que los frentes de onda emitidos tienen una superficie tangente común (envolvente) correspondiente a un cono¹⁴, cuyo eje está en la dirección de movimiento de la fuente, y de semiángulo α , tal que:

$$\text{sen} \alpha = \frac{v}{v_F}. \quad (7.39)$$

El resultado es la propagación de un frente de onda cónico que se propaga según las flechas que hemos indicado en la figura. La relación v_F/v se denomina número de Mach, y es el número de veces que la velocidad de la fuente es superior a la de propagación de las ondas en el medio.

¹⁴Esto es si consideramos frentes de onda esféricos. Si estamos en el caso plano, los frentes de onda circulares tienen dos rectas tangentes comunes.

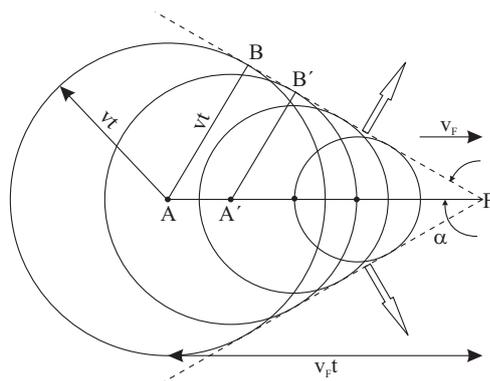


Figura 7.18: Ondas de choque.

Por otro lado, como los frentes se “amontonan” en esta superficie cónica, la amplitud de la onda se hace mayor. Por ejemplo, en el aire una onda sonora de choque puede aumentar la presión hasta el punto de lastimar un oído o romper una ventana. Ejemplos conocidos son el sonido repentino que se escucha cuando pasa un avión supersónico (que se mueve con velocidad superior a la de las ondas sonoras que origina), y la estela que deja sobre la superficie del agua un barco que se mueve con mayor velocidad que las ondas superficiales que genera.

7.7 Superposición de ondas

La última parte del tema de movimiento ondulatorio está dedicada a la superposición de ondas, y al estudio de una serie de fenómenos relacionados, como la interferencia constructiva y destructiva, las ondas estacionarias y las pulsaciones.

Ahondaremos en primer lugar en el Principio de Superposición, del cual ya se trató al estudiar la ecuación de ondas. Como consecuencia del carácter lineal de la ecuación de ondas, o de cualquier ecuación de ondas que sea lineal, la suma de dos soluciones de la ecuación es también una solución. Este resultado ya nos permitió deducir que la solución general de la ecuación (7.9) es una superposición de una onda viajera en el sentido positivo y otra en el sentido negativo (ver (7.11)) y, en consecuencia, que el conjunto de soluciones de la ecuación (7.9) es mucho más extenso que el de las ondas viajeras. Debemos decir que también en este caso se produce, por así llamarlo, un abuso de lenguaje, que pudiera llevar a pensar que el Principio de Superposición es una ley universal o algo parecido, cuando en realidad es una consecuencia de la linealidad de las ecuaciones que gobiernan muchos fenómenos físicos¹⁵. En aquellas situaciones en las que la ecuación no es lineal, este “Principio”, deja de tener validez.

¹⁵Quizás fuese más correcto denominarlo Teorema de Superposición, pues su validez no es universal, sino que está supeditada al carácter lineal de la ecuación de ondas que gobierne la propagación. No obstante, hemos preferido mantener la denominación que aparece normalmente en la literatura.

Nos detendremos ahora en otro aspecto del Principio de Superposición, que podríamos enunciar de la forma siguiente:

“Cuando varias fuentes de ondas están actuando a la vez, y la ecuación que gobierna la propagación de ondas es lineal, entonces el movimiento ondulatorio resultante es la suma de los movimientos ondulatorios debidos a cada una de las fuentes”.

Podríamos decir que este es el Principio de Superposición en su máxima expresión: la consecuencia más importante de la linealidad es que el efecto colectivo de varias fuentes de ondas es la suma de los efectos individuales¹⁶.

7.7.1 Superposición de ondas armónicas

Para plantear este apartado con una matemática sencilla, pero sin pérdida de generalidad, supondremos la superposición de dos ondas armónicas de la misma amplitud

¹⁶Veremos esto con cierto detalle matemático, con el único objeto de tranquilizar la posible inquietud del lector al respecto. Cualquier ecuación de ondas lineal, en presencia de fuentes, tiene la expresión siguiente:

$$L[f(x, t)] = F(x, t), \quad (7.40)$$

donde $F(x, t)$ se refiere a la fuente, $f(x, t)$ es la incógnita de la ecuación (la solución de la ecuación de ondas), y L es un operador lineal. Un operador es un objeto matemático que transforma una función (original) en otra (transformada), y es lineal cuando actuando sobre una suma de funciones la transforma en una suma, donde cada sumando es la transformada del correspondiente sumando de la original. Por ejemplo, la Ecuación de Ondas (7.9) se puede expresar de la forma

$$L[g(x, t)] = 0 \quad ; \quad L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (7.41)$$

Supongamos ahora que tenemos varias fuentes $F_i(x, t)$, $i = 1, \dots, N$, y sea $f_i(x, t)$ la onda correspondiente a esta fuente, es decir,

$$L[f_i(x, t)] = F_i(x, t) \quad ; \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.42)$$

Sumando las distintas ecuaciones, tendríamos

$$\sum_1^N L[f_i(x, t)] = \sum_1^N F_i(x, t). \quad (7.43)$$

Ahora bien, como L es un operador lineal, entonces

$$\sum_1^N L[f_i(x, t)] = L\left[\sum_1^N f_i(x, t)\right],$$

y (7.43) se convierte en

$$L\left[\sum_1^N f_i(x, t)\right] = \sum_1^N F_i(x, t), \quad (7.44)$$

es decir, a la superposición de las causas, $\sum_1^N F_i(x, t)$, le corresponde la superposición de los efectos $\sum_1^N f_i(x, t)$.

A , que se propagan en el eje OX con la misma velocidad v . Podemos pensar que cada una de estas ondas proviene de una fuente distinta, y al sumarlas estamos buscando respuesta a la pregunta de cuál es el movimiento ondulatorio resultante.

Sean $g_1(x, t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 x)$ y $g_2(x, t) = A \cos(\omega_2 t - k_2 x + \phi)$ las dos ondas armónicas, ambas propagándose con la misma velocidad $v = \omega_1/|k_1| = \omega_2/|k_2|$, siendo ϕ la diferencia de fase entre ambas en $x = 0$ y $t = 0$. El signo menos que aparece en el argumento no significa que ambas se propaguen en el mismo sentido del eje OX , puesto que los k_i ($i = 1, 2$) pueden ser positivos y/o negativos. El movimiento ondulatorio resultante es

$$g(x, t) = g_1(x, t) + g_2(x, t) = A[\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x + \phi)], \quad (7.45)$$

y, usando la relación trigonométrica

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \quad (7.46)$$

se obtiene

$$g(x, t) = 2A \cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\phi}{2}\right] \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x + \frac{\phi}{2}\right]. \quad (7.47)$$

La ecuación (7.47) lo dice/contiene todo acerca de la superposición de ondas armónicas de la misma amplitud, pero para ver o darnos cuenta de todo lo que “lleva dentro” vamos a estudiar algunos casos particulares en que la expresión se simplifica, o cobra un aspecto peculiar con nombre propio (pulsaciones). Estos casos son:

- Las dos ondas con la misma frecuencia y viajando en el mismo sentido del eje OX .
- Las dos ondas con la misma frecuencia y viajando en sentidos opuestos.
- Las dos ondas con frecuencias muy próximas entre sí.

Interferencia constructiva y destructiva.

En este caso, haciendo $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$ y $k_1 = k_2 \equiv k$ se tiene, sustituyendo en (7.47):

$$g(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left[\omega t - kx + \frac{\phi}{2}\right]. \quad (7.48)$$

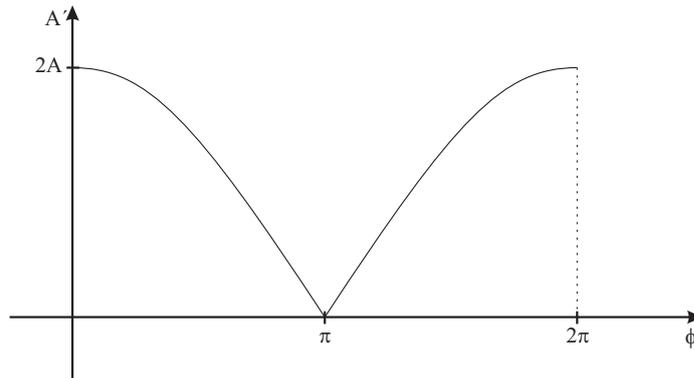


Figura 7.19: Amplitud de la onda resultante de la superposición de dos ondas viajeras que se propagan en el mismo sentido, en función de la diferencia de fase que hay entre ellas.

Vemos que (7.48) es una onda viajera¹⁷, de la misma frecuencia y sentido que las ondas que se superponen, pero con una amplitud que depende de su amplitud, A , y de la diferencia de fase ϕ que hay entre ambas:

$$A' = 2A \left| \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right|. \quad (7.49)$$

En la figura (7.19) hemos representado A' en función de ϕ . Cuando $\phi = 0$, las dos ondas están en fase, y la amplitud resultante es la suma de las amplitudes individuales, $2A$. Este caso se denomina *interferencia constructiva*. Cuando $\phi = \pi$ las dos ondas están en oposición de fase, y la amplitud resultante es nula, es decir, el movimiento ondulatorio resultante es igual a cero. Este segundo caso se denomina *interferencia destructiva*. En cualquier caso se tendrá que $A'(A, \phi) \leq 2A$.

Si las dos ondas tienen amplitudes distintas, A_1 y A_2 , se puede demostrar que la amplitud resultante es $A_1 + A_2$ en la situación de interferencia constructiva, y $|A_1 - A_2|$ en la de interferencia destructiva. Vamos a hacerlo¹⁸ fijándonos en la dependencia temporal de ambos movimientos ondulatorios en una posición fija del espacio, y teniendo en cuenta el concepto de onda viajera, lo cual nos ayudará a comprender mejor el fenómeno. Si las dos ondas están en fase en $x = 0$, entonces las

¹⁷Que en este caso $g_1 + g_2$ es una onda viajera es un resultado que podríamos haber anticipado, pues sabemos que la suma de dos ondas viajeras de la misma velocidad y sentido es otra onda viajera que se propaga en el mismo sentido que las ondas que se superponen y con la misma velocidad.

¹⁸Aunque la explicación que vamos a dar ahonda en el concepto de onda viajera, vamos a ver que analíticamente es inmediato:

$$\phi = 0 \iff g_1 + g_2 = A_1 \cos(\omega t - kx) + A_2 \cos(\omega t - kx) = (A_1 + A_2) \cos(\omega t - kx).$$

$$\phi = \pi \iff g_1 + g_2 = A_1 \cos(\omega t - kx) + A_2 \cos(\omega t - kx + \pi) = (A_1 - A_2) \cos(\omega t - kx),$$

dado que $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$.

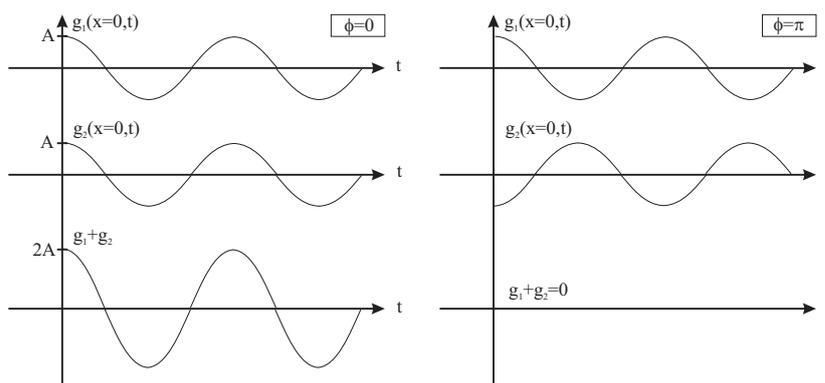


Figura 7.20: Superposición de ondas de la misma amplitud en los casos $\phi = 0$ y $\phi = \pi$.

oscilaciones en este punto están “acompañadas”, tal y como se muestra en la figura (7.20); ambas alcanzan los valores máximo y mínimo a la vez, y pasan por cero en los mismos instantes y con el mismo sentido para la velocidad ($\partial g_i / \partial t$, $i = 1, 2$). Por tanto, el movimiento resultante en $x = 0$, suma de las oscilaciones individuales, será un movimiento armónico simple de amplitud $A_1 + A_2$, y el periodo, y por tanto la frecuencia, será el mismo. Como las oscilaciones en $x = 0$ se transmiten a los demás puntos del espacio a velocidad constante, el resultado será una onda armónica cuya amplitud es $A_1 + A_2$ y cuya longitud de onda será la misma que la de las ondas superpuestas (recuérdese que una onda periódica en el espacio lo es también en el tiempo, y viceversa, existiendo la relación $\lambda = vT$ entre los periodos espacial y temporal). En cambio, si $\phi = \pi$ las oscilaciones en $x = 0$ serán opuestas: cuando una alcanza el valor máximo la otra alcanzará el valor mínimo, y viceversa, y ambas pasarán por cero en los mismos instantes, pero con sentidos opuestos para la velocidad. En consecuencia, la oscilación resultante tendrá amplitud $|A_1 - A_2|$ y dicha oscilación se transmitirá a todos los puntos del eje OX a velocidad constante. Especialmente representativo es el caso en que $A_1 = A_2$ donde ya hemos visto que la onda resultante es nula.

Ondas Estacionarias

Supongamos ahora el caso en que las dos ondas tienen la misma frecuencia, $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$, pero se propagan en sentidos contrarios, es decir, $k_2 = -k_1 \equiv -k$. Se tiene, sustituyendo en (7.47):

$$g(x, t) = 2A \cos\left(kx + \frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right). \quad (7.50)$$

Este resultado es completamente distinto al dado por (7.48). Lo primero que vemos es que (7.50) no es una onda viajera, puesto que $g(x, t)$ es el producto de una función de x por otra función de t , que no puede escribirse como una función del

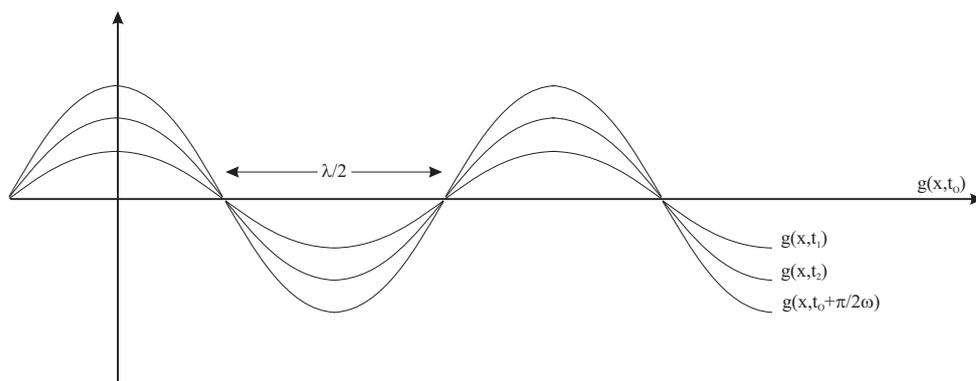


Figura 7.21: Ondas estacionarias.

único argumento $x \pm vt$. Esta expresión recibe el nombre de *onda estacionaria*.

Para comprender mejor qué es una onda estacionaria¹⁹ nos fijaremos en la dependencia temporal en una posición fija. Es obvio que se trata de un MAS de frecuencia angular ω , y amplitud $A'(x) = 2A|\cos(kx + \frac{\phi}{2})|$. Es decir, habrá puntos del eje OX en los que $A' = 0$, y por tanto el movimiento ondulatorio resultante en dichos puntos será nulo; estos puntos se denominan *nodos*. También habrá puntos en los que $A' = 2A$, los cuales se denominan *antinodos* o *vientres*. Vayamos ahora con la dependencia con x para un tiempo fijo: la dependencia es armónica, con un periodo espacial igual a la longitud de onda de las ondas superpuestas ($\lambda = 2\pi/k$), y con una amplitud que dependerá del instante concreto en el que hacemos la “fotografía” de la onda. Habrá instantes, aquéllos en los que $\cos(\omega t - \frac{\phi}{2}) = 0$, en los que $g(x, t) = 0$. Estos instantes están separados entre sí por el semiperiodo de las ondas que se superponen. En la figura (7.21) hemos representado distintas curvas “fotografías” que corresponden a la dependencia espacial para varios instantes de tiempo. La distancia entre dos nodos (o antinodos) consecutivos es $\lambda/2$.

Pulsaciones

El último caso corresponde a la situación en que las ondas tienen frecuencias parecidas. Para entender esto un poco mejor pondremos un ejemplo, que además nos servirá para ilustrar todo lo que vayamos obteniendo en este apartado. Supongamos que las ondas que se superponen provienen de dos diapasones acoplados a sus

¹⁹La caracterización que estamos haciendo aquí es muy particular: para el caso de una onda armónica. La definición general de una onda estacionaria es la de una onda que se puede factorizar en un término dependiente de la posición por otro dependiente del tiempo. Esto implica que el aspecto (la forma) de la onda es la misma en cualquier instante; o dicho de otro modo que la relación entre los valores de la onda en dos puntos cualesquiera no depende del tiempo:

$$g(x, t) = F(x)G(t) \quad \rightarrow \quad \frac{g(x_1, t)}{g(x_2, t)} = \frac{F(x_1)G(t)}{F(x_2)G(t)} = \frac{F(x_1)}{F(x_2)}.$$

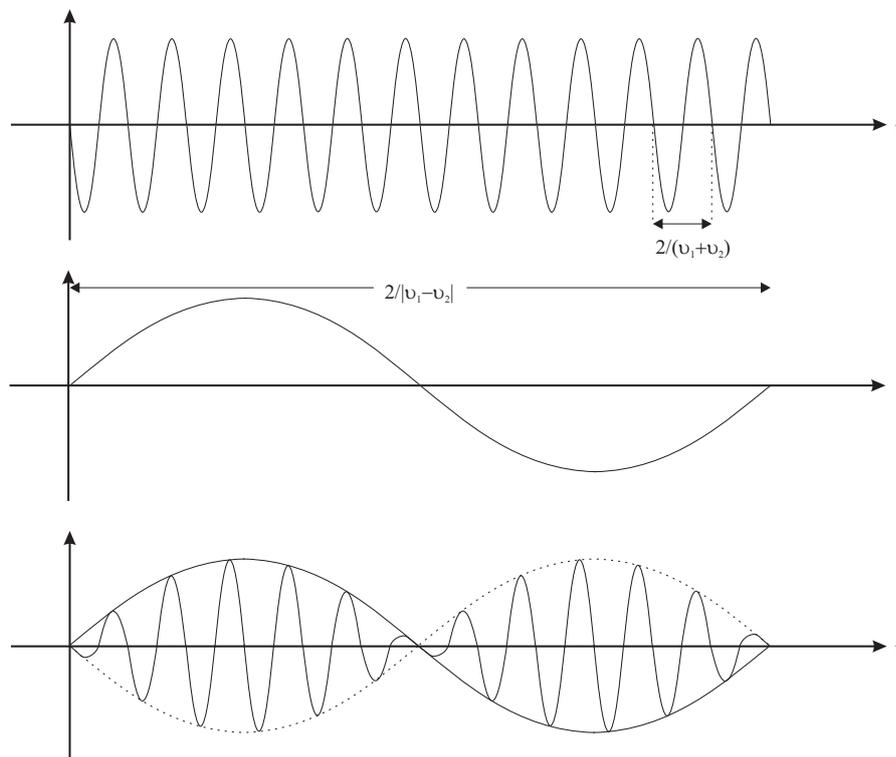


Figura 7.22: Pulsaciones.

cajas de resonancia, uno de ellos con una frecuencia $\nu_1 = 440Hz$, y el otro con $\nu_2 = 430Hz$. Por ejemplo, la nota musical “La” corresponde a una frecuencia en las oscilaciones de la presión de 440 ciclos por segundo. La frecuencia es la magnitud que guarda relación con el concepto de “tono” en las ondas sonoras. Si nos fijamos en (7.47), la superposición de las ondas provenientes de los dos diapasones dará lugar, en una posición fija del espacio, al producto de dos movimientos armónicos simples, uno de frecuencia $|\nu_1 - \nu_2|/2$, que en este caso sería igual a $5Hz$, y el otro de frecuencia $(\nu_1 + \nu_2)/2$, que en este ejemplo sería $435Hz$. Es decir, que uno tarda 0.2 segundos en oscilar, y el otro ≈ 0.003 segundos, es decir, unas 87 veces menos que el anterior. El producto de ambos términos en (7.47) dará lugar a unas oscilaciones de $435Hz$ (un “tono” parecido al de los diapasones) pero con una “amplitud” que no es constante, sino que está modulada por un término que oscila a $5Hz$.

Ahora bien, aunque (7.47) nos dice que la amplitud oscila a la semisuma de las frecuencias, lo más importante es que las oscilaciones de alta frecuencia están contenidas entre dos curvas cosenoidales opuestas (ver figura), y como consecuencia de esto el receptor escucha un sonido que “desaparece” periódicamente. La frecuencia a la que se suceden estos “mínimos” en la audición se corresponde con la frecuencia de los “globitos” en la figura, y recibe el nombre de *frecuencia de pulsación*²⁰, que

²⁰La magnitud física que guarda relación con nuestra sensación “fisiológica” de lo fuerte o débil que es un sonido es la *intensidad* de la onda, la cantidad de energía que transporta la onda

representaremos por ν_p :

Así,

$$\nu_p = |\nu_1 - \nu_2|. \quad (7.51)$$

por unidad de área y de tiempo. En una onda sonora armónica, la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda, resultado éste que requeriría una demostración cuidadosa pero que no vamos a hacer aquí. Pues bien, cuando se superponen dos ondas de frecuencias parecidas, oscilando la amplitud de la onda a una frecuencia muy baja, $|\nu_1 - \nu_2|/2$, la intensidad oscila al doble de frecuencia, y esta magnitud recibe el nombre de *frecuencia de pulsación*.

7.8 Problemas

1. Sea una onda viajera unidimensional $g(x, t) = g(x - vt)$ que se propaga respecto a un sistema de referencia S . Sea S' un sistema de referencia que se mueve respecto a S con velocidad $V\vec{v}$ ($V > 0$). Demostrar que $g'(x', t)$ es una onda que se propaga con velocidad $|V - v|$. ¿Qué condición debe cumplir V para que la onda se propague en el sentido negativo de S' ?
2. Una onda viajera $g(x, t)$ se desplaza en el sentido negativo del eje OX con una celeridad de 3 m/s . Se sabe que para $x = 0$, $g(0, t) = 2/(9 + t^2)$. ¿Cuánto vale $g(x = 1\text{ m}, t = 2\text{ s})$?

Respuesta: $9/65$.

3. En un medio S se propaga una onda armónica $g = A\cos(\omega t - kx)$. Hallar la expresión de la onda en un sistema de referencia S' que se mueve en el sentido positivo del eje OX de S a una velocidad constante V . Analizar la expresión obtenida. ¿Cómo son la longitud de onda y la frecuencia de la onda en S' en relación a S ? ¿A qué velocidad V la fase de la onda vista por S' permanece constante?

Respuesta: $g = A\cos[(1 - V/v)\omega t - kx']$, siendo $v = \omega/k$; $V = v$.

4. Sea la función $g(x, t) = x^2 + 4t^2$. Se pide:
 - (a) ¿Verifica $g(x, t)$ la ecuación de ondas?
 - (b) En caso positivo, ¿cuál es la velocidad de propagación? ¿Es $g(x, t)$ una onda viajera?
 - (c) En caso negativo, ¿cuáles son las ondas viajeras cuya superposición da lugar a $g(x, t)$? Represente gráficamente $g(x, t)$ para distintos instantes de tiempo.
5. Una onda viajera transversal que se propaga por una cuerda tensa viene descrita por la ecuación siguiente:

$$g(x, t) = \frac{b^3}{b^2 + (2x - ut)^2}, \quad b > 0, \quad u > 0.$$

Se pide:

- (a) Representar gráficamente $g(x, t = 0)$.
- (b) ¿Cuál es la velocidad de la onda y su sentido de movimiento?
- (c) Comprueba que $g(x, t)$ verifica la ecuación de ondas.
- (d) Obtener la velocidad de los puntos de la cuerda para $t = 0$, y representarla gráficamente. Analizar cualitativamente el movimiento de la onda a partir de las dos gráficas.

Respuesta: b) $u/2$ en el sentido positivo de OX ; d) $\partial g/\partial t]_{t=0} = 4ub^3x/(b^2 + 4x^2)^2$

6. En cierto sistema de referencia se observa un fenómeno físico que queda descrito por una onda armónica que se propaga en la dirección del eje OX . Un segundo sistema de referencia se mueve también en la dirección del eje OX respecto al primero y con una aceleración constante distinta de cero. ¿Observa este segundo sistema de referencia una onda armónica?
7. Mostrar que cualquier función diferenciable $g(x, t) = f(t + \alpha x)$, siendo α constante, es solución de la ecuación de onda. ¿Qué relación existe entre α y la velocidad de propagación?
8. Una onda armónica de amplitud $A = 0.5 \text{ cm}$ se propaga en el eje OX , siendo su frecuencia $\nu = 10^3 \text{ Hz}$, y su velocidad $v = 10^3 \text{ cm s}^{-1}$. Se pide:
 - (a) La celeridad máxima en cada punto.
 - (b) La pendiente máxima de la onda para un instante concreto.

Respuesta: (a) $10^3\pi \text{ cm/s}$; (b) π .

9. Una onda armónica de frecuencia $\nu = 400 \text{ Hz}$ tiene una velocidad de fase $v = 320 \text{ m s}^{-1}$. Determinése:
 - (a) La separación espacial entre dos puntos si la diferencia de fase en un instante dado es, en valor absoluto, 60° .
 - (b) La diferencia de fase entre dos elongaciones de un mismo punto en dos instantes separados por un intervalo de tiempo de 10^{-3} s .

Respuesta: (a) 0.13 m ; (b) 0.8π .

10. Se observa la dependencia con el tiempo en dos posiciones $x_1 = 0 \text{ m}$ y $x_2 = 1 \text{ m}$, de una onda armónica. Esta dependencia es:

$$g_1(x_1 = 0, t) = 0.2\text{sen}3\pi t \quad ; \quad g_2(x_2 = 1, t) = 0.2\text{sen}(3\pi t + \pi/8).$$

Se pide:

- (a) ¿Cuál es la amplitud de la onda?
- (b) ¿Cuál es la frecuencia de la onda?
- (c) ¿Cuál es la longitud de onda?
- (d) ¿Con qué velocidad y con qué sentido se mueve la onda?

Nota: si consideras que alguna/as de las preguntas del enunciado tiene(n) más de una respuesta posible debido a que la cantidad de información que da el enunciado es limitada, debes indicar todas las posibilidades, razonando tus conclusiones.

Respuesta: a) 0.2; b) 1.5 Hz; c) Un valor posible de la longitud de onda es $16/17 m$, si la onda se desplaza hacia la izquierda.

11. Un diapasón oscila con una frecuencia de $440 Hz$, dando lugar a ondas sonoras de la misma frecuencia. Si la velocidad del sonido en el aire es $340 ms^{-1}$, hallar la longitud de onda del sonido producido.

Respuesta: $0.772 m$.

12. La luz se propaga en el vacío con una velocidad de $3 \times 10^8 ms^{-1}$. Hallar la longitud de onda correspondiente a la frecuencia de $5 \times 10^{14} Hz$, que es la frecuencia de la luz roja del espectro visible.

Respuesta: $6 \times 10^{-7} m$.

13. Una onda armónica plana se propaga en el espacio en la dirección y sentido del vector $\vec{m} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Su amplitud es $A = 2 cm$, su frecuencia $\nu = 510 Hz$ y su longitud de onda $\lambda = 2/3 m$. Determinar:

- (a) Vector de onda, velocidad de propagación y frecuencia angular.
 (b) Expresión de la onda.

14. Una onda armónica plana, cuya frecuencia angular es $30 rad/s$, tiene sus frentes de onda paralelos al plano $2x + 2y + z - 4 = 0$. En un instante dado, la diferencia de fase (en valor absoluto) entre los puntos $\vec{r}_1 = \vec{k} m$ y $\vec{r}_2 = \vec{i} m$ es igual a $\pi/3$. ¿Cuánto vale la velocidad de fase (en m/s)?

Respuesta: $30/\pi m s^{-1}$.

15. Sea Π un frente de una onda armónica plana, la cual se desplaza según la dirección y sentido del vector unitario $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$. Se sabe que Π tarda un tiempo τ en pasar del punto $P \equiv (x_P, y_P, z_P)$ a otro punto $Q \equiv (x_Q, y_Q, z_Q)$. ¿Cuánto vale la velocidad de la onda?

Respuesta: $v = [u_x(x_Q - x_P) + u_y(y_Q - y_P) + u_z(z_Q - z_P)]/\tau$.

16. Una onda armónica plana de frecuencia ω se propaga con velocidad v , y su dirección de propagación forma los ángulos α , β y γ con los ejes OX , OY y OZ respectivamente. Calcular la diferencia de fase en un instante dado entre las oscilaciones de los puntos con las coordenadas x_1, y_1, z_1 , y x_2, y_2, z_2 .

Respuesta: $\Delta\phi = \vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = (\omega/v)[\cos\alpha(x_1 - x_2) + \cos\beta(y_1 - y_2) + \cos\gamma(z_1 - z_2)]$.

17. Un tren viaja a 180 km/h . Sus ocupantes observan que las ondas transversales viajeras de un hilo que hay en la tierra viajan a 10 m/s en el mismo sentido que el tren. Si el hilo tiene una densidad lineal de 0.1 kg/m , ¿con qué fuerza se tensó?

Nota: la velocidad de propagación de las ondas en una cuerda uniforme de densidad lineal λ sometida a una tensión uniforme T , viene dada por $\sqrt{T/\lambda}$.

Respuesta: 360 N .

18. Una onda esférica armónica se desplaza desde el origen de coordenadas. En un cierto instante, la diferencia de fase de las oscilaciones de los puntos de coordenadas (en metros) $(0, 1, 0)$ y $(1, 2, 2)$ es 2π . ¿Cuál es su longitud de onda?

Respuesta: 2 m .

19. Determinar la intensidad de las ondas de la luz visible a una distancia de 1.5 m de una bombilla de 60 W . Suponer que el 5 por 100 de la potencia de la bombilla se emite en forma de luz visible, y considerar que la bombilla es una fuente puntual que emite uniformemente en todas las direcciones a través de un medio isótropo y no absorbente.

Respuesta: 0.1 W/m^2

20. En un medio isótropo se propaga una onda esférica armónica

$$g(r, t) = \frac{1}{r} \text{sen}(kr - \omega t),$$

siendo $k = 2\pi/3 \text{ m}^{-1}$, y $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$. Se pide:

- (a) Velocidad de propagación.
 (b) Sean dos frentes de onda de superficies S_2 (radio r_2) y S_1 (radio r_1). Sabiendo que en un instante concreto t_o la diferencia de fase en las oscilaciones correspondientes a las dos superficies es $\phi(r_2, t_o) - \phi(r_1, t_o) = \pi/3$, y que $S_2 - S_1 = 10\pi \text{ m}^2$, calcular r_2 y r_1 .

Respuesta: $r_1 = 9/4 \text{ m}$; $r_2 = 11/4 \text{ m}$.

21. Un viajero de un tren, que circula a la velocidad de 72 km/h , observa que viene un tren en sentido contrario y comprueba que la frecuencia del silbato de la locomotora de aquél disminuye al pasar, siendo la frecuencia observada después de pasar los tres cuartos de la observada antes de cruzarse. ¿Qué velocidad lleva el tren que pasa? Nota: tómese para la velocidad de fase de las ondas sonoras 340 m/s .

Respuesta: 103.73 km/h .

22. Una fuente sonora emite ondas periódicas de frecuencia 300 Hz y velocidad de fase 300 ms^{-1} . Se pide:
- Suponiendo que la fuente se mueve a una velocidad de 30 ms^{-1} , ¿cuáles son las longitudes de onda delante y detrás de la fuente móvil?
 - ¿Qué frecuencia percibe un observador, en reposo respecto al medio, que ve alejarse a la fuente a 30 ms^{-1} ?
 - Suponiendo que la fuente se encuentra en reposo, y que un observador percibe una frecuencia de 270 Hz , ¿cuál es la velocidad del observador respecto al medio?

Respuesta: (a) 0.90 m ; 1.10 m ; (b) 273 Hz ; (c) 30 ms^{-1} .

23. En la fórmula del efecto Doppler que se ha deducido en clase, las velocidades de la fuente y el observador, así como la velocidad de propagación de las ondas, están referidas al medio. Supongamos ahora que el medio se mueve a una velocidad $\vec{V}_m = v_m \vec{i}$ respecto a otro sistema de referencia, el cual ve moverse a la fuente y al observador a velocidades $\vec{V}'_F = v'_F \vec{i}$ y $\vec{V}'_O = v'_O \vec{i}$ (\vec{i} sigue siendo un vector unitario en el sentido que va desde la fuente al observador). Demostrar que la frecuencia percibida por el observador es

$$\nu' = \nu \frac{v - v'_O + v_m}{v - v'_F + v_m},$$

siendo v la velocidad de propagación de las ondas respecto al medio.

24. Una sirena emite con una frecuencia ν_F (Hz). Dicha fuente sonora se aproxima hacia un observador O en reposo, con una celeridad u (m/s), estando ambas velocidades referidas al suelo. Se sabe que la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s . Hoy hay un fortísimo viento de 100 m/s que sopla desde la sirena hacia el observador. ¿Qué frecuencia percibe O ?

Respuesta: $\nu_F / (1 - u/440)$.

25. Una fuente sonora tiene una frecuencia de 10^3 Hz y se mueve a la velocidad de 30 ms^{-1} con respecto al aire. Suponiendo que la velocidad del sonido respecto al aire es de 340 ms^{-1} , hallar la longitud de onda efectiva y la frecuencia percibida por un observador en reposo respecto al aire y que ve a la fuente:

- Alejándose de él.
- Acercándose a él.

26. Repetir el problema anterior, suponiendo que la fuente está en reposo respecto al aire, pero que el observador se mueve con la velocidad de 30 m/s . De sus resultados, ¿podría usted concluir que no importa cuál de los dos se está moviendo?

Respuesta: (a) $1.088 \times 10^3\text{ Hz}$; (b) $9.117 \times 10^2\text{ Hz}$.

27. Una fuente inmóvil emite sonido de una cierta frecuencia ν_F . A ésta se le aproxima una pared con una velocidad $u = 33 \text{ cm/s}$. La velocidad de propagación del sonido en el medio es $v = 330 \text{ m/s}$.
- (a) ¿En qué porcentaje varía la longitud de onda del sonido reflejado por la pared?
- (b) Si $\nu_F = 440 \text{ Hz}$, ¿qué frecuencia de pulsación percibe un observador en reposo situado entre la fuente y la pared?

Ayuda: la frecuencia con que emite la pared es igual a la frecuencia que recibe. Esta es una propiedad general de la reflexión de ondas.

Respuesta: 0.2%; 0.88 s^{-1} .

28. Demostrar que cuando las velocidades de la fuente y el observador verifican $|v_F| \ll v$ y $|v_O| \ll v$, siendo v la velocidad de propagación de las ondas emitidas por la fuente, la relación entre la frecuencia percibida por el observador y la emitida por la fuente puede expresarse de la forma siguiente:

$$\nu_O \approx \nu_F \left(1 + \frac{v_F - v_O}{v} \right).$$

Ayuda: usar el desarrollo binomial $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x$, para $|x| \ll 1$.

29. Un tren se mueve con celeridad u respecto a tierra. En el centro del mismo una bocina emite sonido a una cierta frecuencia. Sean A y B dos pasajeros situados en cada uno de los extremos del tren. ¿Qué relación existe entre las frecuencias percibidas por A y B ? Analícense por separado los casos en que el tren está completamente cerrado, y la situación en que el tren tiene las ventanillas abiertas.
30. Un coche de policía pasa con movimiento uniforme junto a un peatón en reposo, mientras suena su sirena que tiene una frecuencia $\nu_F = 500 \text{ Hz}$. El coche continúa por la calle cuyo extremo final está bloqueado por una pared alta de ladrillo, que refleja el sonido. Se sabe que el peatón escucha $n = 10$ pulsaciones por segundo. ¿Qué velocidad lleva el coche? Dato: tómese la velocidad del sonido igual a 340 m/s .
- Respuesta:* 12.2 km/h .
31. Un coche de policía pasa con movimiento uniforme a 72 km/h junto a un peatón en reposo, mientras suena su sirena que tiene una frecuencia $\nu_F = 2000 \text{ Hz}$. Un viento muy fuerte de 40 m/s sopla en la dirección de movimiento del coche respecto al suelo. El coche continúa por la calle cuyo extremo final está bloqueado por una pared alta de ladrillo, que refleja el sonido. ¿Qué tono percibe el peatón? Dato: tómese la velocidad del sonido igual a 300 m/s .

Respuesta: 1991 Hz .

32. Dos fuentes sonoras, F_1 y F_2 , emiten a frecuencias $\nu_{F_1} = 440 \text{ Hz}$ y $\nu_{F_2} = 443 \text{ Hz}$ respectivamente. Un observador O se aleja de ambas con una velocidad diez veces más pequeña que la velocidad del sonido en el medio. ¿Cuántas pulsaciones escucha O cada diez segundos?

Respuesta: 27.

33. Dos fuentes de ondas sonoras emiten sendas ondas armónicas de la misma amplitud $g_i(x, t) = C \text{sen} 2\pi[\nu_i t - x_i/\lambda_i]$, $i = 1, 2$, siendo $\nu_1 = 400 \text{ Hz}$ y $\nu_2 = 390 \text{ Hz}$. Sabiendo que la velocidad del sonido es 300 ms^{-1} , obtener el término modulador de la onda resultante para $t = 0$ y $x = 1 \text{ m}$.

Respuesta: $1.99C$

Capítulo 8

CAMPO ELECTROSTÁTICO

8.1 Introducción al Electromagnetismo

La propiedad de las partículas responsable de la interacción electromagnética es la *carga eléctrica*. La carga puede ser positiva o negativa (o nula en el caso de que la partícula no tenga carga), está cuantizada, siendo un múltiplo positivo o negativo del valor absoluto de la carga del electrón, y se conserva localmente. La unidad de carga en el sistema internacional es el Culombio (C). Las partículas cargadas, en reposo o en movimiento respecto a un sistema de referencia inercial $OXYZ$, generan el campo electromagnético, que está representado por dos campos vectoriales $\vec{E}(x, y, z; t)$ denominado *campo eléctrico*, y otro $\vec{B}(x, y, z; t)$ denominado *campo magnético*.

Las *ecuaciones de Maxwell* (segunda mitad del siglo XIX), junto con la fuerza de Lorentz, representan los postulados del electromagnetismo, siendo válidas para cualquier fenómeno electromagnético¹. Las ecuaciones de Maxwell son 4 ecuaciones que gobiernan el comportamiento del campo electromagnético a partir de las fuentes, densidades de carga y corrientes. En estas ecuaciones, los campos eléctrico y magnético están acoplados, de tal modo que forman parte de una realidad única denominada *campo electromagnético*. Es decir, \vec{E} y \vec{B} no evolucionan independientemente el uno del otro en la situación general electrodinámica².

La *linealidad* de las ecuaciones de Maxwell es la propiedad de las mismas responsable de lo que conocemos como *Principio de Superposición*, y que aplicaremos en los desarrollos teóricos posteriores: el campo debido a una superposición de fuentes es la suma de los campos producidos por cada una de las fuentes³.

¹Veáanse las ecuaciones (1.1) a (1.4), junto con la ecuación (1.6), del tema 1.

²Los temas que vamos a tratar en esta asignatura, de Electroestática y Magnetostática, corresponden a las situaciones donde las fuentes son las cargas en reposo y corrientes estacionarias. En esta situación, las ecuaciones de Maxwell para \vec{E} y \vec{B} están desacopladas.

³Esta propiedad es válida en el vacío, y se aplicará en lo sucesivo. No obstante, en medios materiales (que no vamos a tratar en este curso) la linealidad o no de las ecuaciones dependerá del tipo de relaciones constitutivas que se den en el medio.

Las ecuaciones de Maxwell describen el comportamiento del campo electromagnético a partir de las fuentes (cargas y corrientes). El campo actúa a su vez sobre las propias cargas, dando lugar a la interacción electromagnética, que está representada por la *Fuerza de Lorentz*: Si una carga q se encuentra en una posición del espacio \vec{r} con una velocidad \vec{v} , donde en cierto instante t los campos eléctrico y magnético son $\vec{E}(\vec{r}; t)$ y $\vec{B}(\vec{r}; t)$, la fuerza que actúa sobre q es

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}). \quad (8.1)$$

Las ecuaciones de Maxwell, junto con la Ley de Lorentz, conforman las ecuaciones básicas que gobiernan el comportamiento del campo electromagnético y la interacción electromagnética. En el sistema internacional, las unidades de \vec{E} son Newton dividido por Culombio (N/C) y la unidad de \vec{B} es el Tesla (T), siendo $1T = 1N/(A.m)$, donde A (Amperio) representa la unidad de intensidad de corriente y es igual a un Culombio dividido por segundo ($1A = 1C/s$).

8.2 Leyes de la Electroestática

La Electroestática corresponde a una situación estacionaria, es decir, las cargas se hallan en reposo respecto a cierto sistema de referencia. El campo eléctrico no depende del tiempo y recibe el nombre de *Campo Electroestático*.

En cada punto del espacio $P \equiv (x, y, z)$ hay un campo eléctrico $\vec{E}(x, y, z)$, y las ecuaciones básicas del electromagnetismo en la situación electrostática son:

1. La Ley de Gauss:

“El flujo eléctrico⁴ a través de cualquier superficie cerrada S es igual a la carga que encierra dicha superficie dividida por la permitividad dieléctrica del vacío, $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} C^2/(Nm^2)$.”

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}. \quad (8.2)$$

2. La segunda ley afirma que el campo electrostático es conservativo:

“La circulación del campo eléctrico a través de cualquier curva cerrada C es nula.”

⁴Consideremos una superficie S , y la dividiremos en infinitos elementos infinitesimales. Si llamamos dS al área infinitesimal de un elemento en torno a un punto P , podemos definir un vector $d\vec{S}$ perpendicular a éste, y cuyo módulo es dS . Si \vec{E} es el valor del eléctrico en P , el producto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ es el *flujo elemental* que atraviesa dicha superficie. Si sumamos para toda la superficie, tendremos el flujo total; es decir, la integral de $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ es el flujo que atraviesa la superficie. Si se trata de una superficie cerrada, la integral $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ representa el flujo total a través de dicha superficie. En el caso de una superficie cerrada, el sentido vector $d\vec{S}$ se elige hacia fuera de la superficie en cada punto.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (8.3)$$

Las ecuaciones anteriores constituyen los postulados básicos de la Electroestática. No obstante, hemos de señalar una diferencia fundamental entre ambas: la Ley de Gauss (ecuación (8.2)) es válida en cualquier situación, y relaciona el campo eléctrico con las fuentes escalares que lo producen, las cargas, siendo uno de los cuatro postulados del Electromagnetismo. Por otro lado, la ecuación (8.3) es válida en la situación particular de electrostática, en la que los campos eléctrico y magnético están desacoplados, y el campo eléctrico es conservativo ⁵

Las ecuaciones (8.2) y (8.3) permiten conocer el campo electrostático a partir de las fuentes (las cargas), así como el potencial electrostático, que estudiaremos más adelante.

8.3 Campo creado por una distribución de cargas estacionarias

El principio de superposición nos permite reducir el problema del cálculo del campo eléctrico de una distribución de cargas a la siguiente pregunta: ¿Cuál es el campo eléctrico producido por una carga en reposo respecto a cierto sistema de referencia? Una vez que tengamos la respuesta, el campo eléctrico de cualquier sistema de cargas estacionarias se obtendrá sumando los campos producidos en cada punto por cada una de las cargas.

Consideremos una carga q situada en una posición F , y sea P un punto cualquiera⁶. Sea $FP = r$ la distancia entre ambos puntos, y $\vec{u}_r = \overrightarrow{FP}/r$ el vector unitario que representa la dirección y sentido que va desde la carga al punto.

A partir de la Ley de Gauss (8.2) puede deducirse la expresión del campo eléctrico. Su expresión es:

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \vec{u}_r, \quad (8.4)$$

donde $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0) = 8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ recibe el nombre de *constante de Coulomb*.

Nótese que el campo de una carga puntual tiene las siguientes propiedades:

- Es radial, y su módulo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa la carga del punto campo.

⁵En la situación general electrodinámica, el campo eléctrico no es conservativo, lo que se representa por la ley de inducción de Faraday, donde el lado derecho de (8.3), en vez de ser nulo, es igual a menos la derivada temporal del flujo magnético a través de cualquier superficie delimitada por la curva cerrada.

⁶ F suele denominarse *punto fuente* y P *punto campo*.

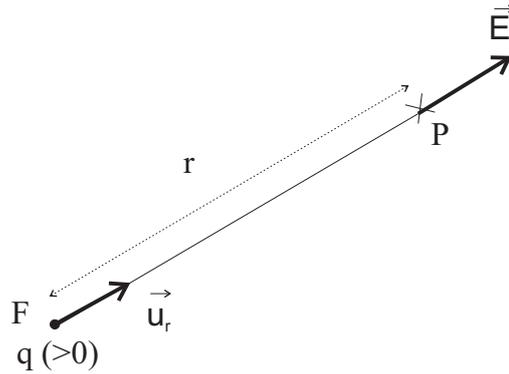


Figura 8.1: Campo eléctrico creado por una carga puntual.

- Tiene simetría esférica: en todos los puntos situados a la misma distancia de F el módulo del campo es el mismo.
- Si $q > 0$ el campo lleva el sentido FP , y si $q < 0$ lleva el sentido PF , es decir, hacia F .

Para obtener la expresión (8.4), aplicaremos la ley de Gauss. Por simetría, el campo tiene el mismo módulo en todos los puntos de una superficie esférica de radio r centrada en F , y lleva dirección radial. En este caso, eligiendo esta superficie para aplicar la ley de Gauss, y teniendo en cuenta que el vector $d\vec{S}$ lleva la misma dirección (radial) que el campo, tenemos:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = ES = E4\pi r^2, \quad (8.5)$$

de modo que

$$E4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (8.6)$$

Consideremos a continuación un conjunto de cargas estacionarias, q_1, q_2, \dots, q_N , en las posiciones F_1, F_2, \dots, F_N (vectores de posición $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$). El campo eléctrico en un punto P (vector de posición \vec{r}) es la superposición de los campos creados en P por cada una de la cargas. Llamando $r_{i,P} = F_iP$, y $\vec{u}_{i,P} = \overrightarrow{F_iP}/r_{i,P}$, tenemos:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \sum_{i=1}^N k_e \frac{q_i}{r_{i,P}^2} \vec{u}_{i,P} = \sum_{i=1}^N k_e \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (8.7)$$

8.3.1 Líneas de campo

En electromagnetismo es interesante el concepto de *líneas de campo*, que se definen como curvas que son tangentes al campo en cada punto, y cuyo sentido de recorrido coincide con el del campo eléctrico.

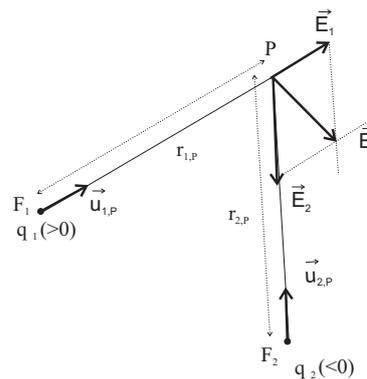


Figura 8.2: Campo eléctrico creado por dos cargas $q_1 > 0$ y $q_2 < 0$.

En el caso de una carga puntual las líneas de campo son las líneas radiales que parten de F (en el caso $q > 0$) o dirigidas hacia F (en el caso $q < 0$). Véase la figura 8.5.

8.4 Potencial Electrostático

La ecuación (8.3) representa el carácter conservativo del campo electrostático. Esto implica que, dada una distribución de cargas estacionarias, existe una función escalar de las coordenadas de cada punto $V(\vec{r}) = V(x, y, z)$, de tal modo que⁷

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV \Rightarrow \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\Delta V = V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_B). \quad (8.8)$$

La función $V(\vec{r})$ recibe el nombre del *potencial electrostático*, y en el sistema internacional la unidad de potencial es el Voltio (V). Teniendo en cuenta que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r}, \quad (8.9)$$

donde

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \quad (8.10)$$

es el *gradiente* del potencial, y usando (8.8), llegamos a:

$$(\vec{E} + \vec{\nabla} V) \cdot d\vec{r} = 0 \quad ; \quad \forall d\vec{r} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V. \quad (8.11)$$

Se definen las *superficies equipotenciales*, como los lugares geométricos de los puntos donde el potencial toma un valor idéntico en todos ellos, es decir:

⁷La ecuación (8.8) implica que la integral de $\vec{E} \cdot d\vec{r}$ a lo largo de una curva cerrada es nula.

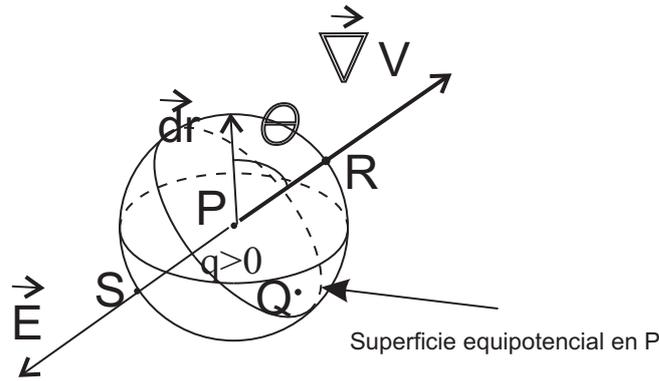


Figura 8.3: El gradiente apunta hacia la dirección de máximo aumento del potencial ($\theta = 0$). El campo eléctrico apunta hacia la dirección de máxima disminución del potencial ($\theta = \pi$). El caso $\theta = \pi/2$ corresponde a un desplazamiento sobre la superficie equipotencial en P .

$$V(x, y, z) = V_0. \quad (8.12)$$

Dando valores a V_0 se obtienen las expresiones de las superficies equipotenciales características del campo electrostático, para una distribución de cargas estacionarias. Nótese que hemos introducido dos conceptos geométricos asociados al campo, las líneas de campo y las superficies equipotenciales, verificándose, como veremos a continuación que *las líneas de campo son perpendiculares a las superficies equipotenciales en cada punto*. Para demostrarlo, consideraremos un punto P , donde el campo es \vec{E} , y el elemento infinitesimal de superficie equipotencial que pasa por P . Si $d\vec{r}$ es un desplazamiento infinitesimal sobre la superficie, es decir, un vector que va desde P a otro punto Q de la superficie, tal que la distancia $PQ = |d\vec{r}|$ es infinitesimal, la variación del potencial es cero (el potencial es idéntico en P y en Q), de modo que:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V \perp d\vec{r}. \quad (8.13)$$

Por tanto, *el campo es perpendicular a las superficies equipotenciales en cada punto*. Como las líneas de campo son paralelas al campo eléctrico en cada punto, deducimos que las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo.

Consideremos a continuación un desplazamiento infinitesimal cualquiera a partir de un punto P . La variación de potencial es:

$$dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = |\vec{\nabla}V||d\vec{r}|\cos\theta, \quad (8.14)$$

donde θ es el ángulo que forma el gradiente y el desplazamiento. Supongamos que, fijado $|d\vec{r}|$ (las infinitas posibilidades constituyen los puntos de una superficie esférica de radio $|d\vec{r}|$), nos preguntamos cuál es el desplazamiento correspondiente a la máxima variación del potencial. La respuesta es que, para $\theta = 0$, es decir, cuando

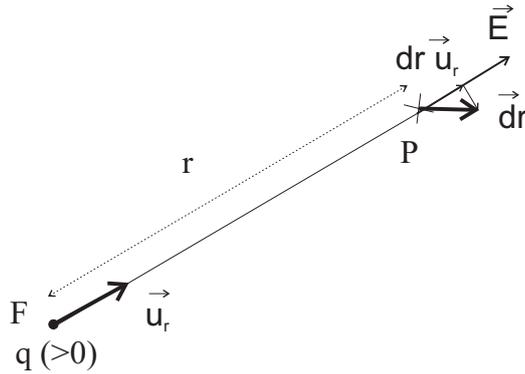


Figura 8.4: Potencial creado por una carga puntual.

$d\vec{r}$ es paralelo al gradiente, se tiene la máxima variación del potencial ($dV_{max} = V_R - V_P$). Ahora bien, como $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, el campo eléctrico apunta hacia la dirección donde se produce la máxima disminución del potencial ($dV_{min} = V_S - V_P$). De este modo, podemos afirmar que:

- El gradiente del potencial apunta hacia la dirección donde se produce el máximo aumento del potencial.
- El campo eléctrico apunta en la dirección donde se produce la máxima disminución de potencial.

8.4.1 Potencial creado por una distribución de cargas

Comenzaremos este apartado calculando el potencial creado por una carga puntual. Después, aplicando el principio de superposición, obtendremos el potencial creado por una distribución de cargas estacionarias. Nótese que, una vez calculado el potencial, la expresión (8.11) permite calcular el campo electrostático en todos los puntos del espacio.

Sea q una carga situada en la posición F . El campo en cualquier posición P es radial (lleva la dirección FP), y está dado por la expresión (8.4). Consideremos un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$, que descompondremos en una parte paralela a \vec{u}_r y otra perpendicular, es decir: $d\vec{r} = dr\vec{u}_r + d\vec{r}_\perp$. Es sencillo ver que:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -k_e \frac{q}{r^2} dr, \quad (8.15)$$

dado que $\vec{E} \cdot d\vec{r}_\perp = 0$. Integrando la expresión anterior, tenemos:

$$V = k_e \frac{q}{r} + V_c,$$

donde V_c es una constante arbitraria. Eligiendo el cero de potencial en el infinito, $V(r = \infty) = 0$, se tiene que $V_c = 0$, de modo que:

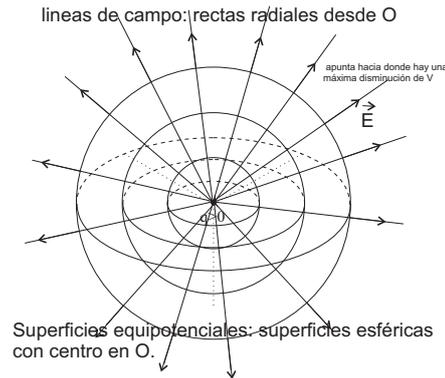


Figura 8.5: Líneas de campo y superficies equipotenciales correspondientes a una carga puntual. El campo apunta en la dirección donde se produce la máxima disminución del potencial, justo al contrario que el gradiente, que apunta hacia donde se produce el máximo aumento del potencial.

$$V(r) = k_e \frac{q}{r}. \quad (8.16)$$

Las superficies equipotenciales son superficies esféricas de centro F . Si $q > 0$ el potencial disminuye a medida que r crece, y si $q < 0$, el potencial aumenta.

Consideremos a continuación una distribución de cargas q_1, q_2, \dots, q_N en las posiciones F_1, F_2, \dots, F_N , y un punto P en la posición \vec{r} . Aplicando el principio de superposición, el potencial en P será la suma de los potenciales producidos por cada una de las cargas. Si llamamos $r_{i,P}$ a la distancia entre F_i y P , el potencial es:

$$V = \sum_{i=1}^N V_i = \sum_{i=1}^N k_e \frac{q_i}{r_{i,P}} = \sum_{i=1}^N k_e \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_{F_i}|}, \quad (8.17)$$

donde \vec{r}_{F_i} representa el vector de posición de la carga fuente F_i respecto a cierto sistema de referencia.

8.5 Fuerza electrostática

El efecto del campo sobre las partículas cargadas se representa mediante la fuerza eléctrica:

$$\vec{F}_e = q\vec{E}. \quad (8.18)$$

Nótese que la fuerza eléctrica es paralela al campo eléctrico, y su sentido es igual (contrario) al de \vec{E} , en el caso de que q sea positiva (negativa). El campo sólo afecta a las partículas cargadas, de tal modo que si $q = 0$, $\vec{F}_e = 0$. La fuerza y el campo son paralelos, siendo del mismo sentido si $q > 0$ y de sentidos opuestos si $q < 0$.

Sea $\vec{E}(\vec{r})$ el campo eléctrico creado por un sistema de cargas estacionarias. Si en la posición \vec{r} se halla una carga puntual q , ésta siente una fuerza que viene dada por la ecuación (8.18). Teniendo en cuenta el principio de superposición para el campo eléctrico dado por la ecuación (8.7), y la ecuación (8.18), deducimos que la fuerza que sufre una carga por hallarse inmersa en un campo eléctrico es igual a la suma de las fuerzas que ejercería cada una de las cargas fuente sobre ella, es decir:

$$\vec{F}_e = q \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \sum_{i=1}^N q \vec{E}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (8.19)$$

La ecuación (8.18) es válida siempre, independientemente de que el campo sea electrostático. Sin embargo, en este caso, el carácter conservativo del campo eléctrico implica que *la fuerza electrostática es conservativa*, es decir:

$$\vec{F}_e(\vec{r}) = -\vec{\nabla} E_P \quad ; \quad E_P(x, y, z) = qV(x, y, z). \quad (8.20)$$

El trabajo realizado por la fuerza electrostática entre dos posiciones \vec{r}_A y \vec{r}_B es:

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -\Delta E_P = E_P(\vec{r}_A) - E_P(\vec{r}_B). \quad (8.21)$$

En base a los aspectos que ya se desarrollaron en el apartado anterior, podemos afirmar que:

- El gradiente de la energía potencial apunta hacia la dirección donde se produce el máximo aumento de la energía potencial.
- La fuerza electrostática apunta en la dirección donde se produce la máxima disminución de la energía potencial.

8.6 Ley de Coulomb

Un aspecto esencial de la interacción eléctrica, es que cargas del mismo signo se repelen, y cargas de signos opuestos se atraen. Este resultado forma parte de una Ley que representa la interacción entre dos cargas, conocida como la Ley de Coulomb (año 1785): “*Dadas dos cargas estacionarias, éstas interaccionan con una fuerza que es directamente proporcional al producto de las cargas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Las cargas se repelen si tienen el mismo signo, y se atraen si tienen signos distintos.*”

Para demostrar la Ley de Coulomb⁸, partiremos de las expresiones (8.4) (campo creado por una carga) y (8.18) (fuerza electrostática). Sean dos cargas q_1 y q_2 en posiciones P_1 y P_2 respectivamente. La fuerza que q_1 ejerce sobre q_2 es

⁸En el desarrollo teórico que estamos haciendo es un resultado más de la teoría, aunque tuvo una importancia capital en el desarrollo de la teoría electromagnética.

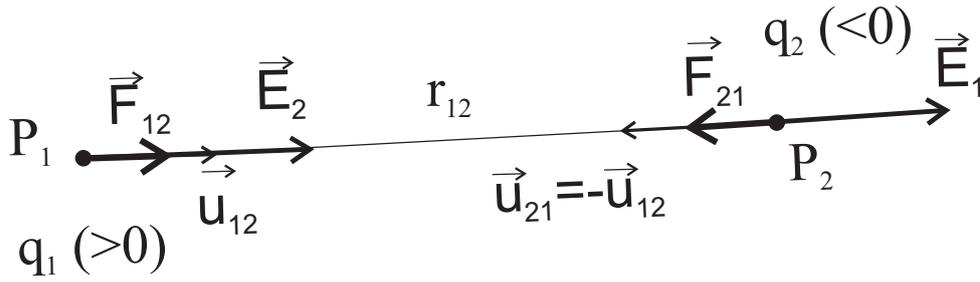


Figura 8.6: Ley de Coulomb. Se ha representado un caso en el que las cargas, al tener signos distintos, se atraen.

$$\vec{F}_{21} = q_2 \vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{k_e q_2 q_1}{r_{12}^2} \vec{u}_{12}, \quad (8.22)$$

donde \vec{u}_{12} es el vector unitario $\overrightarrow{P_1 P_2}/r_{12}$.

Por otro lado, la fuerza que q_2 ejerce sobre q_1 es:

$$\vec{F}_{12} = q_1 \vec{E}_2(\vec{r}_1) = \frac{k_e q_2 q_1}{r_{12}^2} \vec{u}_{21}, \quad (8.23)$$

donde $\vec{u}_{21} = -\vec{u}_{12}$. Por tanto:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = \frac{k_e q_2 q_1}{r_{12}^2} \vec{u}_{12}. \quad (8.24)$$

8.7 Cuestiones y Problemas

1. Dos cargas positivas q_1 y q_2 se encuentran en el eje OX , en las posiciones $x_1 = d > 0$ y $x_2 = 0$ respectivamente. ¿En qué punto x_3 del eje OX la fuerza resultante sobre una tercera carga es nula? Aplicar el resultado obtenido a los datos numéricos $q_1 = 15.0\mu C$, $q_2 = 6.00\mu C$ y $d = 2\text{ m}$.

Respuesta: $x_3 = d(1 - \sqrt{q_1/q_2})/[1 - (q_1/q_2)]$, si $q_1 \neq q_2$; $x_3 = d/2$ si $q_1 = q_2$.
Aplicación numérica: $x_3 = 0.775\text{ m}$.

2. Un *dipolo eléctrico* consiste en dos cargas q y $-q$, que se encuentran respectivamente en las posiciones $x_1 = -a$ y $x_2 = a$ del plano OXY . Obtener el campo eléctrico en un punto del eje OY , en función de la ordenada y . Estudiar el comportamiento del campo del dipolo para $y \gg a$.

Respuesta: $\vec{E}(y) = 2k_e qa/(a^2 + y^2)^{3/2} \vec{i}$; $\vec{E}(y \gg a) \approx 2k_e qa/y^3 \vec{i}$.

3. Dos cargas $q_1 = -q$ y $q_2 = -q$ se encuentran en el eje OX , en las posiciones $x_1 = -a/2$ y $x_2 = a/2$, respectivamente. Una tercera carga $q_3 = q$ se encuentra sobre el eje OY , a una distancia d de q_1 y q_2 . Obtener el potencial eléctrico en el origen. Aplicar el resultado obtenido a la situación $q = 14\mu C$, $d = 4\text{ cm}$, $a = 2\text{ cm}$.

Respuesta: $V = 22,0\text{ MV}$; $1\text{ MV} = 10^6\text{ V}$.

4. El potencial electrostático creado por una distribución estacionaria de cargas está representado en cierta región del espacio por la función $V(x, y, z) = 3x^2y + y^2 + yz$. Se pide:

(a) Campo eléctrico.

(b) Superficies equipotenciales.

(c) Fuerza sobre una carga $q = 2\mu C$ situada en el punto $\vec{r} = \vec{i} + \vec{j}$.

Respuesta: (c) $\vec{F} = -2 \times 10^{-6}(6\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k})\text{ (N)}$.

5. Sean $q_1 = q$ y $q_2 = -q$ dos cargas situadas en el eje OX , en las posiciones $x_1 = d$ y $x_2 = -d$ ($d > 0$) respectivamente. Calcule el potencial eléctrico en un punto del eje OX , en función de x . Obtenga el campo eléctrico para puntos muy alejados del dipolo, usando la relación $E_x = -dV/dx$.

Respuesta: $V(x) = 2k_e qd/(x^2 - d^2)$; $E_x(|x| \gg d) \approx 4k_e qd/x^3$.

6. Demuestre que el potencial electrostático en un punto P es igual al trabajo necesario para llevar la unidad de carga desde el infinito hasta P , de forma cuasiestática.

Ayuda: calcule el trabajo que una fuerza igual a menos la fuerza electrostática (para que la partícula no tenga aceleración) realiza desde el infinito (donde el potencial es cero), hasta P , sobre una carga unidad.

7. Sea $V(\vec{r})$ el potencial electrostático creado por un sistema de cargas estacionarias respecto a cierto sistema de referencia $OXYZ$. Considérese una carga $q > 0$ situada en una posición \vec{r}_0 . Se sabe que el gradiente del potencial en la posición \vec{r}_0 verifica $\vec{\nabla}V(\vec{r} = \vec{r}_0) \neq 0$. Sea \vec{F}_e la fuerza electrostática sobre q . Entonces:

$$\input type="checkbox"/> \vec{F}_e \cdot \vec{\nabla}V(\vec{r} = \vec{r}_0) > 0 \quad ; \quad \input type="checkbox"/> \vec{F}_e \cdot \vec{\nabla}V(\vec{r} = \vec{r}_0) < 0 \quad ; \quad \input type="checkbox"/> \vec{F}_e \cdot \vec{\nabla}V(\vec{r} = \vec{r}_0) = 0$$

8. Sean $\vec{E}(\vec{r})$ y $V(\vec{r})$ el campo y el potencial electrostáticos creados por un sistema de cargas estacionarias. Sea q una carga puntual. La fuerza electrostática sobre q , apunta hacia la dirección:

- De máximo aumento de V .
 De máxima disminución de qV .
 De máximo aumento de qV .

9. Tres cargas $Q_1 = q$, $Q_2 = q$ y $Q_3 = -q$ se sitúan en los vértices de un triángulo equilátero de lado L . ¿Cuál es el módulo de la fuerza total que Q_1 y Q_2 ejercen sobre Q_3 ?

$$\input type="checkbox"/> \sqrt{3}q^2k_e/L^2 \quad ; \quad \input type="checkbox"/> \sqrt{3}q^2k_e/(2L^2) \quad ; \quad \input type="checkbox"/> 2\sqrt{3}q^2k_e/L^2$$

10. El potencial eléctrico de una carga puntual en cierto punto P vale $200 V$, y el módulo del campo eléctrico en P vale $200 V/m$. ¿Cuánto vale la distancia de P a la carga?

$$\input type="checkbox"/> 1 m \quad ; \quad \input type="checkbox"/> 2 m \quad ; \quad \input type="checkbox"/> 3 m$$

11. Dos cargas puntuales $q_1 > 0$ y $q_2 < 0$, siendo $|q_1| > |q_2|$, se encuentran en las posiciones $x_1 = 0$ y $x_2 = 3 m$ del eje OX . Sea $\vec{E}_Q = E_Q\vec{i}$ el valor del campo eléctrico producido por las dos cargas en el punto $Q = (x_Q, 0, 0)$. Entonces se puede asegurar que $E_Q < 0$ para cualquier valor de x_Q en el intervalo:

$$\input type="checkbox"/> (-\infty, 0) \quad ; \quad \input type="checkbox"/> (0, 3) \quad ; \quad \input type="checkbox"/> (3, +\infty)$$

12. Dos cargas q_1 y q_2 , de igual valor absoluto, se encuentran situadas en el eje OX . La q_1 en el punto de coordenadas (en metros) $(-1, 0, 0)$, y la q_2 en el $(+1, 0, 0)$. La fuerza neta que q_1 y q_2 ejercen sobre una tercera carga negativa, colocada en el punto $(0, 3, 0)$ vale $2\vec{i}N$. Entonces los signos de las cargas q_1 y q_2 son:

$$\input type="checkbox"/> \text{Iguales.} \quad ; \quad \input type="checkbox"/> q_1 > 0 \text{ y } q_2 < 0. \quad ; \quad \input type="checkbox"/> q_1 < 0 \text{ y } q_2 > 0.$$

13. Dos cargas $q_1 = -q$ y $q_2 = -q$ se encuentran en el eje OX , en las posiciones $x_1 = -a/2$ y $x_2 = a/2$, respectivamente. Una tercera carga $q_3 = q$ se encuentra sobre el eje OY , a una distancia $d = a$ de q_1 y q_2 . ¿Cuánto vale el potencial eléctrico en el origen?

$$\input type="checkbox"/> 2k_eq(\sqrt{3} - 6)/(3a)$$

$k_e q(\sqrt{2} - 8)/(2a)$

$k_e q(\sqrt{6} - 24)/(6a)$

Capítulo 9

CAMPO MAGNETOSTÁTICO

9.1 Corriente eléctrica

En el tema anterior hemos estudiado el campo electrostático, producido por cargas en reposo respecto a cierto sistema de referencia. Vamos a adentrarnos a continuación en el campo magnético, producido por cargas en movimiento, y que actúa sobre cargas que se mueven, según se puede observar en la ecuación (8.1).

Para comenzar vamos a definir el concepto de *corriente eléctrica*. Consideremos una distribución filiforme de corriente, consistente en un hilo de sección dS por el que fluye carga. Si en un intervalo de tiempo Δt atraviesa dS una carga ΔQ , se define la *intensidad de corriente* a partir de

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \quad (9.1)$$

En el caso de una corriente *estacionaria*, I no depende del tiempo, y es la misma para todos los puntos del hilo, lo que está relacionado con el principio de conservación de la carga¹. El sentido de la corriente es, por convenio, el correspondiente al flujo de carga positiva.

9.2 Leyes de la Magnetostática

La *Magnetostática* corresponde al estudio del campo magnético producido por corrientes estacionarias, es decir, independientes del tiempo. Consideraremos el caso más simple de corrientes filiformes estacionarias. En cada punto del espacio $P \equiv (x, y, z)$ hay un campo magnético $\vec{B}(x, y, z)$.

Las ecuaciones básicas del electromagnetismo en la situación magnetostática son:

¹Un estudio más riguroso de este tema requiere definir el concepto de *densidad de corriente*, cuyo flujo corresponde a la definición de intensidad de corriente. En segundo curso se estudiará el concepto de corriente con la rigurosidad y profundidad que requiere, así como otros aspectos del electromagnetismo, que hemos dejado fuera de este breve curso introductorio.

1. La ley de inexistencia de fuentes escalares de campo magnético, o ley de Gauss para el campo magnético:

“El flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada S es nulo.”

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (9.2)$$

2. La Ley de Ampère:

“La circulación del campo magnético a través de cualquier curva cerrada C es igual al producto de la permeabilidad magnética del vacío ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{kg.m/C}^2$) y la intensidad que atraviesa cualquier superficie cuyo contorno es la curva C .”

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (9.3)$$

La orientación de los elementos de superficie, en relación al sentido de recorrido sobre la curva C , verifica la regla de la mano derecha: si el pulgar apunta hacia la dirección positiva que representa a los elementos de área, los dedos al cerrarse indican el sentido de recorrido sobre la curva.

Las ecuaciones anteriores constituyen los postulados básicos de la Magnetostática, de tal forma que, conocidas las distribuciones de corriente, estas ecuaciones son suficientes para determinar el campo magnético. La ecuación (9.2) es válida en cualquier situación, estática o dinámica, y es una de las cuatro leyes de Maxwell. Comparando con la ecuación (8.2), vemos que el campo eléctrico tiene como fuentes las propias cargas, y la ley de Gauss relaciona el flujo eléctrico con las cargas que encierra la superficie cerrada. No obstante, la ley (9.2) muestra que no existen cargas magnéticas q_m , o sea, fuentes escalares de campo magnético. La inexistencia de cargas magnéticas implica que las líneas de campo magnético no tienen extremos.

Por otro lado, la Ley de Ampère es válida sólo en situaciones estáticas, y es equivalente a la ley de Biot-Savart, que vamos a exponer a continuación².

9.3 Ley de Biot-Savart

Consideremos una corriente estacionaria I , que fluye por un hilo, representado geoméricamente por una curva C . Definiremos un *elemento de corriente* a partir del producto $I d\vec{l}$, siendo $d\vec{l}$ un elemento de la curva C , cuyo sentido coincide con el de la corriente.

²La ley de Biot-Savart permite obtener el campo magnético producido por cualquier corriente estacionaria; sin embargo, la ley de Ampère sólo es útil, a efectos del cálculo del campo magnético, cuando se dan altas propiedades de simetría de tal modo que la integral que aparece en (9.3) se pueda evaluar fácilmente.

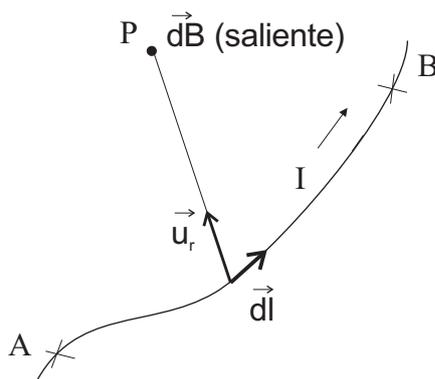


Figura 9.1: Ley de Biot-Savart. El campo en P es saliente (hacia fuera del papel) suponiendo que la corriente circula por una trayectoria plana.

Ley de Biot-Savart. El campo magnético que produce el elemento de corriente en un punto P está dado por la expresión:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2}, \quad (9.4)$$

donde r es la distancia que hay entre el elemento de corriente y P , y \vec{u}_r el vector unitario que va del elemento de corriente a P . A partir de (9.4) vemos que:

- El campo magnético es perpendicular al elemento de corriente y a \vec{u}_r .
- Su módulo es inversamente proporcional al cuadrado de r .

Para calcular el campo en P debido a un trozo finito de hilo, el que va desde un punto A a otro B , aplicamos el principio de superposición:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2}, \quad (9.5)$$

9.3.1 Campo creado por un hilo rectilíneo infinito

Consideremos un hilo rectilíneo infinito que se extiende por el eje OY , y por el que circula una corriente I . Por la ley de Biot-Savart vemos que el campo en cualquier punto P (situado a una distancia a del hilo) es perpendicular al plano que contiene al hilo y a P . El sentido del campo magnético está dado por la regla de la mano derecha: si con el pulgar señalamos la dirección y sentido de la corriente, los dedos de la mano, al cerrarse, indican el sentido del campo magnético. Por simetría, el módulo del campo magnético depende sólo de la distancia de P al hilo. Por tanto, las líneas de campo son circunferencias perpendiculares al hilo y centradas en éste.

Vamos a calcular el campo magnético usando primeramente la ley de Ampère, y posteriormente la ley de Biot-Savart. La ley de Ampère puede aplicarse para

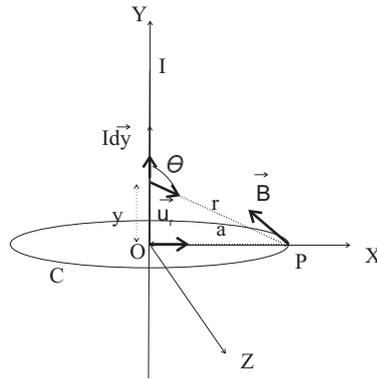


Figura 9.2: Campo magnético producido por un hilo de corriente.

calcular el campo debido a la elevada simetría. Eligiendo como curva cerrada una línea de campo, el campo es tangente a la misma y su módulo uniforme, de modo que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B dl = B \oint_C dl = B2\pi a. \quad (9.6)$$

Por otro lado, la intensidad que atraviesa cualquier superficie delimitada por C es I , de modo que:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}, \quad (9.7)$$

en todos los puntos de C . En concreto, en el punto P de la figura, el campo es $\vec{B}_P = -\mu_0 I / (2\pi a) \vec{k}$.

El mismo resultado puede obtenerse por Biot-Savart: Tomaremos un eje OX con origen en el hilo y que pasa por P . El elemento de corriente es, teniendo en cuenta que $d\vec{l} = dy\vec{j}$, $I dy\vec{j}$, y $d\vec{l} \wedge \vec{u}_r = -dy \text{sen}\theta \vec{k}$. Como $\text{sen}\theta = a/r = a/\sqrt{a^2 + y^2}$, tenemos:

$$d\vec{B} = -dB_z \vec{k} \quad ; \quad dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (9.8)$$

Teniendo en cuenta que $\int_{-\infty}^{+\infty} dy / (a^2 + y^2)^{3/2} = 2$, recuperamos el resultado de la ecuación (9.7).

9.4 Fuerza magnética

El campo magnético actúa sobre las cargas en movimiento. Si una carga q se encuentra en una posición del espacio \vec{r} con una velocidad \vec{v} , donde en cierto instante t el campo magnético es \vec{B} , la fuerza que actúa sobre q es

$${}^3\int \frac{du}{(u^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{d^2\sqrt{d^2+u^2}}.$$

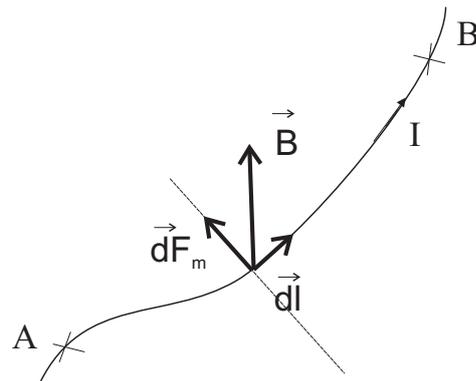


Figura 9.3: Fuerza magnética sobre un elemento de corriente. La fuerza es perpendicular al elemento de corriente y al campo magnético.

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}. \quad (9.9)$$

La fuerza magnética es perpendicular a la velocidad de la partícula y al campo magnético, su módulo es proporcional a la celeridad v , a B , y al seno del ángulo que forman \vec{v} y \vec{B} :

$$|\vec{F}_m| = |q|B\text{sen}\theta. \quad (9.10)$$

Por otro lado, el sentido de \vec{F}_m es el del producto vectorial de \vec{v} por \vec{B} si $q > 0$, y opuesto si $q < 0$.

Como la fuerza magnética es perpendicular a la velocidad, no realiza trabajo, y por tanto no contribuye a la variación de la energía cinética de la partícula:

$$\delta W_m = \vec{F}_m \cdot d\vec{r} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0. \quad (9.11)$$

Por tanto si una partícula se mueve bajo la acción exclusiva de un campo magnético, su celeridad no cambia con el tiempo, lo que se deduce de la aplicación del teorema de la energía cinética:

$$dE_C = \delta W_m = 0 \Rightarrow v = cte. \quad (9.12)$$

Consideremos a continuación una corriente filiforme, por la que circula una intensidad I , inmersa en el seno de un campo magnético \vec{B} . La fuerza que ejerce el campo sobre un elemento de corriente $I d\vec{l}$ está dada por la expresión:

$$d\vec{F}_m = I d\vec{l} \wedge \vec{B}. \quad (9.13)$$

Aplicando el principio de superposición, la fuerza neta sobre un trozo finito de hilo, entre dos puntos A y B , será:

$$\vec{F}_m = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} I d\vec{l} \wedge \vec{B}. \quad (9.14)$$

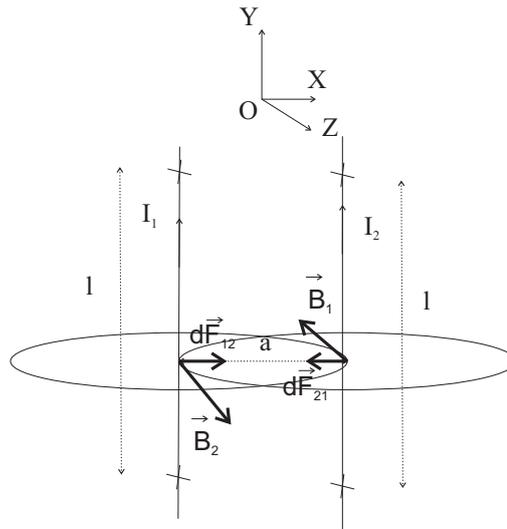


Figura 9.4: Fuerza magnética entre dos hilos de corriente. Se ha representado el caso en que las corrientes llevan el mismo sentido, dando lugar a una fuerza atractiva.

En el caso de que el campo magnético sea el mismo en todos los puntos del hilo, y de que el hilo sea rectilíneo, la fuerza que ejerce el campo entre dos puntos A y B , es:

$$\vec{F}_m = I\vec{l} \wedge \vec{B}, \quad (9.15)$$

donde $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$.

9.4.1 Fuerza entre dos hilos de corriente

Consideremos dos hilos de corriente, 1 y 2, infinitos, por los que circulan corrientes de intensidades I_1 e I_2 respectivamente, llevando ambas el mismo sentido. Los hilos son paralelos, y están separados por una distancia a . Elegiremos unos ejes $OXYZ$ como indica la figura. Calcularemos la fuerza que el hilo 1 (2) ejerce sobre un trozo del hilo 2 (1), de longitud l . Como el campo magnético es uniforme en cada hilo, podemos aplicar la expresión (9.15). Tenemos:

$$\vec{F}_{21} = I_2 \vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1 = I_2 l \vec{j} \wedge \left(-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \vec{k} \right) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a} \vec{i}. \quad (9.16)$$

$$\vec{F}_{12} = I_1 \vec{l}_1 \wedge \vec{B}_2 = I_1 l \vec{j} \wedge \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \vec{k} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a} \vec{i}. \quad (9.17)$$

Como puede observarse a partir de (9.16) y (9.17), podemos afirmar que:

“Dos hilos infinitos de corriente por los que circulan intensidades en el mismo sentido se atraen con una fuerza por unidad de longitud que es directamente proporcional al producto de las intensidades de corriente, e inversamente proporcional a la distancia que los separa.”

Supongamos a continuación que las intensidades llevan sentidos opuestos. Por ejemplo, el sentido de I_1 es el del eje OY positivo, y el de I_2 el del eje OY negativo. Un cálculo similar al anterior, nos da:

$$\vec{F}_{21} = I_2 \vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1 = -I_2 l \vec{j} \wedge \left(-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \vec{k} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a} \vec{i}. \quad (9.18)$$

$$\vec{F}_{12} = I_1 \vec{l}_1 \wedge \vec{B}_2 = I_1 l \vec{j} \wedge \left(-\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \vec{k} \right) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a} \vec{i}. \quad (9.19)$$

Por tanto:

“Dos hilos infinitos de corriente por los que circulan intensidades en el sentidos opuestos se repelen con una fuerza por unidad de longitud que es directamente proporcional al producto de las intensidades de corriente, e inversamente proporcional a la distancia que los separa.”

9.5 Cuestiones y problemas

1. Calcule el campo magnético producido por una espira circular contenida en un plano Π , de radio R , por la que circula una intensidad I , en el centro C de la espira.

Respuesta: $|\vec{B}_C| = \mu_0 I / (2R)$; $\vec{B}_C \perp \Pi$.

2. Calcule el campo magnético producido por una espira circular de radio R contenida en un plano Π , por la que circula una intensidad I , en un punto P del eje de la espira que está situado a una distancia d de su centro C . Haciendo $d = 0$, recupere el resultado del problema anterior. Ayuda: por simetría, el campo lleva la dirección del eje de la espira.

Respuesta: $|\vec{B}_P| = \mu_0 I R^2 / [2(R^2 + d^2)^{3/2}]$; $\vec{B}_P \perp \Pi$.

3. Calcule el campo magnético en el centro C producido por un arco circular de corriente (de ángulo θ) perteneciente a una espira de radio R contenida en un plano Π , y por la que circula una intensidad I . Haciendo $\theta = 2\pi$ se recupera el resultado del problema anterior.

Respuesta: $|\vec{B}_C| = \mu_0 I \theta / (4\pi R)$; $\vec{B}_C \perp \Pi$.

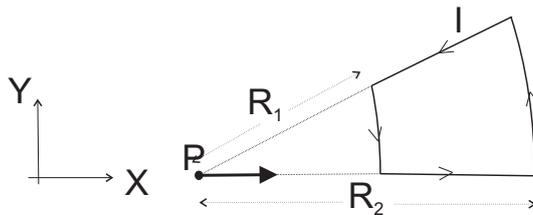
4. Una corriente I circula por un arco circular de centro C , radio R y ángulo θ , y sendos tramos rectilíneos que comienzan en los extremos del arco y acaban en el infinito. ¿Cuál es el módulo del campo magnético en C ?

Respuesta: $|\vec{B}_C| = \mu_0 I \theta / (4\pi R)$.

5. Una espira está formada por dos arcos circulares concéntricos, de radios R_1 y $R_2 = 2R_1$, unidos por sendos segmentos radiales, los cuales forman un ángulo α . La espira transporta una corriente I . Obtener el campo magnético \vec{B} en el centro P . ¿Cuál es la fuerza magnética sobre un electrón que se encuentra en P con una velocidad de módulo v , dirigida según indica la figura? ¿Y su aceleración? Aplicar los resultados obtenidos a los datos numéricos: $I = 3.00 \text{ A}$, $R_1 = 0.600 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$, $v = 3.00 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$.

Nota: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}$; $|q_e| = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$; $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

Respuesta: $\vec{a} = -\frac{v|q_e|\mu_0 I \alpha}{8\pi m R_1} \vec{j} = -6.90 \times 10^{10} \vec{j} (\text{m s}^{-2})$.



6. Una espira ABC tiene forma de sector circular de radio R y ángulo agudo θ . la espira se encuentra en el plano OXY , siendo $A(0, 0)$, $B(R, 0)$, y $C(R\cos\theta, R\sin\theta)$, y por ella circula una intensidad I en sentido antihorario. Un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\vec{k}$ llena todo el espacio. Se pide: (a) Fuerza que ejerce el campo sobre los tramos AB , BC y CA de la espira. (b) Fuerza total sobre la espira.

Respuesta: $\vec{F}_{AB} = -IB_0R\vec{j}$; $\vec{F}_{BC} = IRB_0[\sin\theta\vec{i} + (1 - \cos\theta)\vec{j}]$; $\vec{F}_{CA} = IB_0R(\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j})$; $\vec{F}_{tot} = 0$.

7. Un hilo infinito que se extiende a lo largo del eje OY , transporta una corriente I_1 en el sentido positivo de OY . Una espira rectangular en el plano OXY , de vértices $A(a, 0)$, $B(a + b, 0)$, $C(a + b, d)$ y $D(a, d)$, transporta una corriente I_2 en sentido horario. ¿Cuál es la fuerza que el hilo ejerce sobre el lado DC ? ¿Cuál es la fuerza total sobre la espira?

Respuesta: $\vec{F}_{DC} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln[1 + (b/a)]\vec{j}$; $\vec{F}_{espira} = -\mu_0 I_1 I_2 bd / [2\pi a(b + a)] \vec{i}$.

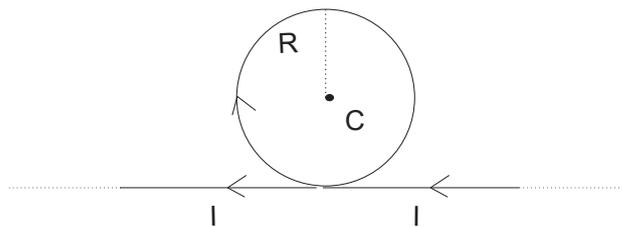
8. Un hilo de corriente infinito, por el que circula una intensidad I , se extiende desde $y = -\infty$ hasta $x = +\infty$, doblándose en ángulo recto en el origen. Se pide: (a) Calcular, utilizando la ley de Biot-Savart, el campo magnético producido en los puntos $A(-d, 0)$ y $B(0, d)$. (b) Fuerza que la parte del hilo que se extiende desde $y = -\infty$ hasta $y = 0$ ejerce sobre el trozo de hilo que se extiende desde el punto $P(a, 0)$ hasta el punto $Q(a + b, 0)$.

Ayuda: Úse la expresión $\int \frac{du}{(u^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{d^2 \sqrt{d^2 + u^2}}$.

Respuesta: $\vec{B}_B = \vec{B}_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \vec{k}$; $\vec{F} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln[1 + (b/a)]\vec{j}$.

9. La corriente de la figura transporta una intensidad I , y el radio de la semicircunferencia, de centro C , es $R = a$. ¿Cuál es el módulo del campo magnético en C ?

- $\mu_0 I(1 + \pi)/(2\pi a)$
- $\mu_0 I(1 + \pi)/(\pi a)$
- $\mu_0 2I(1 + \pi)/(\pi a)$



10. Un hilo infinito de corriente se halla en el eje OY , extendiéndose entre $y = -\infty$ y $y = +\infty$. Por el hilo circula una intensidad I , en el sentido positivo de OY . En cierto instante una partícula de carga positiva q se halla en en la posición $(x = a > 0, y = 0, z = 0)$, y con una velocidad $\vec{v} = v\vec{i}$, siendo $v > 0$. ¿Cuál es el módulo de la fuerza magnética que actúa sobre la partícula en dicho instante?

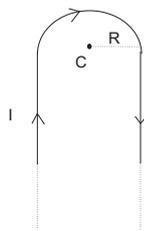
- $\mu_0 Iqv/(\pi a)$; $\mu_0 Iqv/(4\pi a)$; $\mu_0 Iqv/(2\pi a)$

11. Por dos conductores paralelos circulan corrientes del mismo sentido. La intensidad de la corriente que circula por el conductor 1 vale $I_1 = I$, y la intensidad de la que circula por el conductor 2 vale $I_2 = 2I$, siendo $d = 3$ la distancia entre ambos. Un electrón se mueve en el plano Π que contiene a los dos conductores siguiendo una trayectoria paralela a ambos. Denomínese A a la región de Π comprendida entre ambos conductores. Si la fuerza magnética neta que los conductores ejercen sobre el electrón es nula, entonces el electrón se encuentra:

- En A .
- Fuera de A , y más cerca de 1 que de 2.
- Fuera de A , y más cerca de 2 que de 1.

12. La corriente de la figura transporta una intensidad I , y el radio de la semicircunferencia, de centro C , es $R = a$. ¿Cuál es el módulo del campo magnético en C ?

- $\mu_0 I(2 + \pi)/(2\pi a)$
- $\mu_0 I(2 + \pi)/(\pi a)$
- $\mu_0 I(2 + \pi)/(4\pi a)$



Capítulo 10

RELATIVIDAD EN LA FÍSICA CLÁSICA

1

10.1 Transformaciones de Galileo y Mecánica

Sea S un sistema de referencia en el que se verifican las leyes de la Mecánica Clásica. Estos sistemas se denominan inerciales. Cualquier otro sistema S' que se moviera de forma arbitraria respecto de S no sería inercial. Efectivamente, supongamos, para simplificar, que el sistema mecánico que estamos estudiando se reduce a una partícula P de masa m , que supondremos ligada a un sólido 2, y denominaremos 1 y 0 a los sólidos definidos por S y S' . Si la fuerza que actúa sobre P es \vec{F} , se tendrá:

$$\vec{F} = m\vec{a}_1^P \equiv m\vec{a}. \quad (10.1)$$

Por otra parte, la cinemática clásica nos ha enseñado que²:

$$\vec{a}_1^P = \vec{a}_0^P + \vec{a}_1^{P_0} + 2\vec{\omega}_1^0 \wedge \vec{V}_0^P, \quad (10.2)$$

que sustituyendo en (10.1) da:

$$\vec{F} = m\vec{a}_0^P + m(\vec{a}_1^{P_0} + 2\vec{\omega}_1^0 \wedge \vec{V}_0^P), \quad (10.3)$$

lo que nos indica que en S' no se verifica la segunda ley de Newton debido al segundo sumando. Ahora bien, este segundo sumando se anula siempre que el movimiento 01 sea una traslación rectilínea uniforme: $\vec{V}_{01} = \vec{c}t\vec{e}$. Es decir, S' es inercial si se mueve con una traslación uniforme respecto a S . Esto es lo que se conoce como

¹Gran parte del contenido de estos temas se corresponde con la traducción al español de los capítulos 1 y 2 del libro: J. R. Taylor y C. D. Zafiratos, "MODERN PHYSICS FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS". Prentice-Hall International Editions, 1991, ISBN: 0-13-590431-5.

²Véase la ecuación (3.5) y la nota 3 al pie de la página 32.

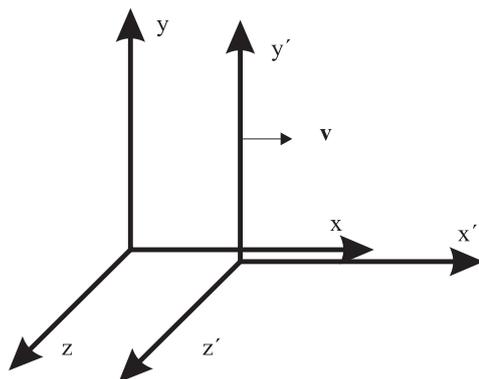


Figura 10.1: Configuración estándar de los marcos de referencia

Principio de Relatividad Galileana de la Mecánica Clásica, que podemos re-enunciar del siguiente modo: *Las leyes de la Mecánica Clásica tienen la misma forma para todos los observadores con movimiento de traslación uniforme entre sí.*

Si en S los sucesos³ se caracterizan por las coordenadas x, y, z y por el tiempo t , y en S' por x', y', z', t' , entonces la Relatividad Galileana nos dice que las ecuaciones del movimiento son invariantes frente a la transformación $G : (x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$, denominada transformación de Galileo.

Veamos qué forma tiene la transformación de Galileo. Para simplificar las expresiones (aunque los resultados serán absolutamente generales) elegiremos las orientaciones de los ejes en S y S' de modo que los ejes OX y $O'X'$ tengan la dirección del movimiento de traslación rectilínea. Además, tomamos los orígenes de tiempos en S y S' en el instante en que ambos sistemas de referencia coinciden. Este modo de elección de los ejes en S y S' lo denominaremos, en lo sucesivo, **configuración estándar**.

Ahora, aceptando las ideas clásicas de espacio y tiempo, y de la figura 10.1, se deduce la transformación de Galileo:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Si lo que queremos obtener es x, y, z, t en función de x', y', z', t' , no tenemos más que resolver el sistema (10.4), obteniendo:

$$x = x' + vt$$

³En Relatividad un suceso es algo que ocurre en cierto punto del espacio y en cierto tiempo. Por tanto, se caracteriza por cuatro números: las tres coordenadas del punto y el instante de tiempo en que sucede.

$$\begin{aligned}
 y &= y' \\
 z &= z' \\
 t &= t'.
 \end{aligned}
 \tag{10.5}$$

Obsérvese que (10.5) se podía haber obtenido directamente de (10.4) sin nada más que intercambiar el signo de v . Esto es debido a que la relación entre S y S' es la misma que la que hay entre S' y S salvo el signo de la velocidad relativa.

10.2 Relatividad Galileana y Electromagnetismo

Aunque la Mecánica Clásica verifica el principio de Relatividad de Galileo, no ocurre lo mismo con el Electromagnetismo. Esto se puede ver tomando las ecuaciones de Electromagnetismo (ecuaciones de Maxwell) y viendo cómo cambian frente a una transformación de Galileo, pero los cálculos son bastante complicados y controvertidos. Un procedimiento más simple es dar por conocido que las leyes del Electromagnetismo implican que, en el vacío, las perturbaciones electromagnéticas (la luz) viajan en cualquier dirección con la misma velocidad⁴ c , independientemente del estado de movimiento de las fuentes del campo electromagnético.

Consideremos ahora dos sistemas de referencia S y S' en la configuración estándar, y supongamos que en S se verifican las leyes del Electromagnetismo, de modo que sus observadores ven las señales luminosas viajar con velocidad c en cualquier dirección. Supongamos que un pulso de luz viaja en el sentido positivo del eje x . Entonces, de acuerdo con la ley clásica de composición de velocidades, los observadores en S' verán el pulso moviéndose en el sentido del eje x' , pero con velocidad $c - v$. Similarmente, un pulso de luz viajando en el sentido negativo del eje x para el observador S , sería visto por S' también viajando en el sentido negativo del eje x' , pero con celeridad $c + v$. Por tanto, en S' la velocidad de la luz variará entre $c - v$ y $c + v$ según su dirección de propagación. En conclusión, las leyes del Electromagnetismo no serán válidas en S' .

La situación que acabamos de describir era bien comprendida por los físicos del final del siglo XIX. En particular, se daba por absolutamente obvio que debía existir un marco de referencia privilegiado, denominado marco del éter, en el que la luz viajaba con velocidad c en todas las direcciones. Estos físicos eran muy mecanicistas en su visión del mundo, y creían que las ondas de luz debían propagarse a través de un medio, al igual que las ondas sonoras se propagan en el aire. Pero como la luz se propaga en el vacío, los físicos tuvieron que reconocer que el éter debía tener unas propiedades inusuales.

Los físicos del siglo pasado pensaban como pensaban. Ahora bien, desde un punto de vista lógico, ante el hecho de que el principio de Relatividad de Galileo

⁴ $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, siendo ϵ_0 y μ_0 la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del vacío.

vale para la Mecánica Clásica pero no para el Electromagnetismo, cabe elegir entre 3 alternativas:

(1) Un principio de Relatividad existe para la Mecánica, pero no para la Electrodinámica. Para esta última existe un marco inercial privilegiado (el marco del éter).

(2) Existe un mismo principio de Relatividad, tanto para la Mecánica como para la Electrodinámica, pero ésta, en la formulación de Maxwell, no es correcta.

(3) Existe un mismo principio de Relatividad, tanto para la Mecánica como para la Electrodinámica, pero la Mecánica Clásica es incorrecta.

La elección entre estas posibilidades sólo puede hacerse sobre la base de los resultados experimentales. La alternativa correcta resultó ser la (3), en la forma de la Teoría Especial de la Relatividad.

De los experimentos que permitieron dilucidar la alternativa correcta sólo analizaremos uno, el más famoso, que permitió eliminar la alternativa (1).

10.3 El experimento de Michelson-Morley

Si se supone que existe un único marco del éter parece claro que a medida que la Tierra orbita alrededor del Sol debe moverse respecto del marco del éter. La detección de este movimiento es la tarea que se propuso Michelson, y que realizó ayudado por Morley entre los años 1.880 y 1.887.

Se podría pensar en medir la velocidad de la luz respecto de la Tierra en distintas direcciones. Si se encontraran velocidades distintas se podría concluir que la Tierra se mueve respecto al éter, y un simple cálculo determinaría la velocidad de este movimiento.

En la práctica este experimento es enormemente difícil porque la velocidad de la luz es enormemente grande ($c = 3 \cdot 10^8 m/s$).

Si denominamos v a la velocidad de la Tierra respecto al éter, entonces la velocidad de la luz que observaríamos debería variar entre $c - v$ y $c + v$. Aunque el valor de v es desconocido, en promedio debería ser del mismo orden de magnitud que la que la velocidad orbital de la Tierra respecto al Sol ($v \approx 3 \cdot 10^4 m/s$), o incluso mayor si el Sol también se mueve respecto al éter⁵.

Vemos que el cambio esperado en las medidas de la velocidad de la luz debido al movimiento de la Tierra es de una parte en 10^4 . Esta cantidad era demasiado pequeña para ser detectada mediante medidas directas de la velocidad en aquella época.

Para evitar la necesidad de tales medidas directas, Michelson diseñó un interferómetro, que es un aparato en el que un haz de luz es dividido en dos haces mediante una superficie semirreflectante; los dos haces viajan a lo largo de caminos perpendiculares y son reunidos de nuevo para formar un patrón de interferencia;

⁵La velocidad en la superficie de la Tierra debida a su rotación propia es del orden de $5 \cdot 10^2 m/s$, por lo que se puede despreciar frente a la velocidad debida al movimiento orbital.

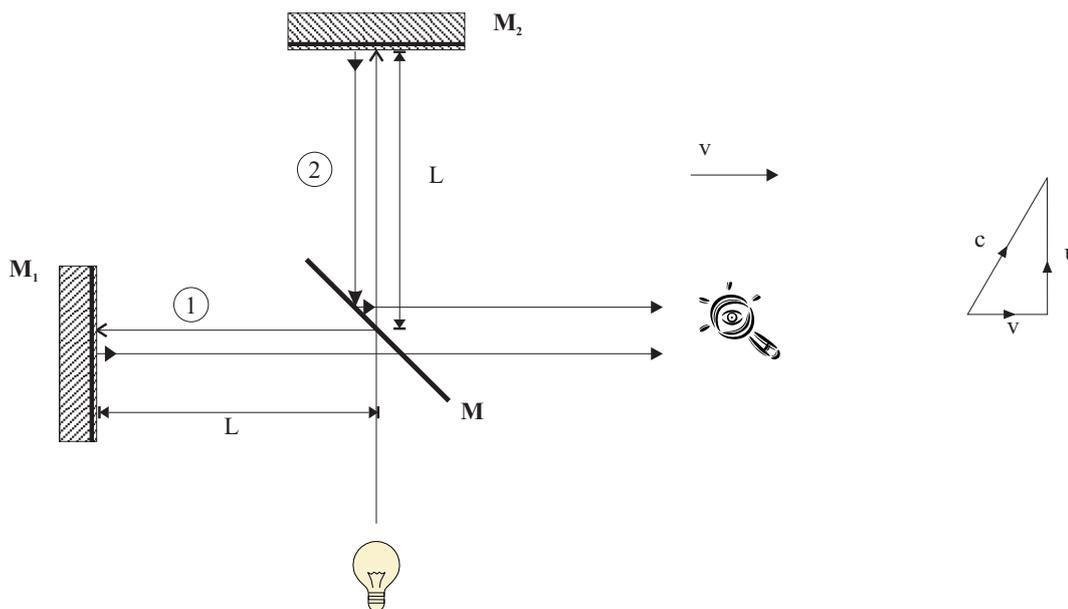


Figura 10.2: Interferómetro de Michelson-Morley.

este patrón es sensible a las diferencias de velocidad de la luz de los dos caminos ortogonales, de modo que permite detectar tales interferencias.

La figura muestra un esquema simplificado del interferómetro de Michelson. Cuando la luz de la fuente llega al espejo semitransparente M , parte continúa su camino hacia el espejo M_2 y la otra parte es reflejada hacia el espejo M_1 . Los dos haces reflejados en M_1 y M_2 vuelven a M , donde vuelven a ser escindidos, de modo que una parte de cada uno de ellos llega al observador. De este modo, el observador recibe dos señales, las cuales interfieren constructiva o destructivamente, dependiendo de sus diferencias de fase.

Para calcular esta diferencia de fase vamos a suponer por el momento que los dos brazos del interferómetro tienen la misma longitud L . En este caso la diferencia de fase se deberá a las distintas velocidades con que los haces recorren cada brazo. Para simplificar las cosas vamos a suponer que el brazo 1 es exactamente paralelo a la velocidad \vec{v} de la Tierra. Entonces la luz viajará de M a M_1 con velocidad $c + v$ (respecto del interferómetro) y regresará de M_1 a M con velocidad $c - v$. El tiempo total empleado en el viaje de ida y vuelta será:

$$t_1 = \frac{L}{c + v} + \frac{L}{c - v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}. \quad (10.6)$$

Es conveniente reescribir esta expresión en términos del cociente $\beta = v/c$ que según hemos visto cabe esperar que sea muy pequeño, $\beta \approx 10^{-4}$. En función de β , (10.6) toma la forma⁶:

⁶En el último paso de (10.7) se ha usado la aproximación binomial: $(1 + z)^n \approx 1 + nz$, válida para cualquier n siempre que $z \ll 1$.

$$t_1 = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} \approx \frac{2L}{c}(1 + \beta^2). \quad (10.7)$$

Denominaremos \vec{u} a la velocidad de la luz respecto al interferómetro en el camino de M a M_2 . Para un observador en el éter dicha velocidad debe ser \vec{c} . La ley de composición de velocidades nos dice que:

$$\vec{c} = \vec{u} + \vec{v}, \quad (10.8)$$

y como \vec{u} y \vec{v} son perpendiculares, se sigue que:

$$u = \sqrt{c^2 - v^2}. \quad (10.9)$$

Como la velocidad en el viaje de vuelta es la misma, el tiempo total empleado en recorrer el brazo 2 será:

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right). \quad (10.10)$$

Vemos que las señales que viajan por los dos brazos tardan tiempos diferentes en volver a M , siendo su diferencia:

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{L}{c} \beta^2. \quad (10.11)$$

Si esta diferencia Δt fuera cero, los dos pulsos llegarían a la vez interfiriendo constructivamente, con lo que la señal resultante sería brillante. Si Δt fuera cualquier múltiplo entero del período de la luz, $T = \lambda/c$ (λ es la longitud de onda de la luz), la interferencia también sería constructiva. Pero si Δt fuera igual a un múltiplo impar de semiperíodos ($\Delta t = 0'5 \cdot T, 1'5 \cdot T, 2'5 \cdot T, \dots$), la interferencia sería destructiva. Podemos expresar estas ideas de forma compacta mediante el cociente:

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{L \frac{\beta^2}{c}}{\frac{\lambda}{c}} = \frac{L \beta^2}{\lambda}. \quad (10.12)$$

N es el número de ciclos completos con que los pulsos llegan fuera de fase; es decir, es el desfase expresado en ciclos.

En la práctica es imposible asegurar que los dos brazos del interferómetro tienen exactamente la misma longitud, por lo que se producirá un desfase adicional debido a esta diferencia. Para evitar esta nueva complicación, Michelson y Morley rotaron el interferómetro 90° , sin dejar de observar el patrón de interferencia mientras movían el aparato. Esta rotación no debería afectar al desfase debido a la diferencia de longitudes de los brazos, pero debería invertir el desfase debido al movimiento terrestre, ya que ahora sería el brazo 2 paralelo a \vec{v} y el 1 perpendicular. Por tanto, la rotación provocaría un cambio en el desfase igual al doble del dado por la expresión (10.12):

$$\Delta N = \frac{2L\beta^2}{\lambda}. \quad (10.13)$$

Esto quiere decir que a medida que se girase el interferómetro el patrón de interferencia iría cambiando de brillo a oscuro ΔN veces.

Cuando Michelson y Morley ejecutaron su experimento no observaron desplazamiento alguno del patrón de interferencia cuando giraron su aparato. Se podría pensar que hicieron el experimento en un momento en que la Tierra estaba en reposo respecto al éter, pero que si se repitiera el experimento unos pocos meses después la velocidad ya no sería cero. Pero el experimento se ha repetido muchas veces en distintos períodos del año, cada vez con mayor precisión, y el resultado siempre ha sido el mismo: El patrón de interferencia no se modificó al rotar el aparato.

La conclusión que cabe extraer del experimento de Michelson y Morley es la siguiente: En contra de todas las previsiones de la época, la luz viaja siempre con la misma velocidad en todas las direcciones cuando se observa desde un sistema de referencia ligado a la Tierra, aún cuando la Tierra tiene diferentes velocidades en diferentes épocas del año. Es decir, no existe un único marco del éter en el que la luz viaja con la misma velocidad en cualquier dirección.

Esta conclusión resultó tan sorprendente que debieron transcurrir casi 20 años para que comenzara a tomarse en serio. Lo que ocurrió fue que se fueron ideando sucesivamente distintas teorías alternativas capaces de explicar el resultado del experimento de Michelson y Morley sin renunciar al concepto del éter. Por ejemplo, en la teoría del arrastre del éter se suponía que la Tierra en su movimiento arrastraba al éter, del mismo modo que lo hace con la atmósfera. En este caso, un observador terrestre estaría en reposo respecto al éter circundante, y el experimento de Michelson y Morley daría la misma velocidad de la luz en todas las direcciones en las distintas épocas del año. Pero, entonces, la luz proveniente de las estrellas debería flectarse al entrar en contacto con la atmósfera etérea terrestre, lo que contradice un conocido fenómeno astronómico: la aberración estelar.

Análogamente, las distintas teorías alternativas para explicar el resultado del experimento de Michelson y Morley fueron siendo abandonadas porque no encajaban con toda la evidencia experimental. Hoy, casi todos los físicos están de acuerdo en que Michelson y Morley no pudieron detectar el movimiento de la Tierra respecto al marco del éter porque el marco del éter no existe. La primera persona que aceptó esta conclusión, desarrollando sus consecuencias hasta el punto de crear una nueva teoría, fue Einstein. A esta teoría, la Relatividad Especial, dedicaremos los dos próximos capítulos.

Capítulo 11

EL ESPACIO Y TIEMPO DE LA RELATIVIDAD

11.1 Los postulados de la Relatividad

Hemos visto que las ideas **clásicas** de espacio y tiempo conducían a dos conclusiones:

1.- La leyes de la Mecánica Newtoniana se cumplen en una familia completa de sistemas de referencia, cada uno de los cuales se mueve uniformemente respecto a cualquier otro.

2.- Sólo puede haber un sistema de referencia en el cual la luz viaja a la misma velocidad c en todas las direcciones (y, más generalmente, en las que todas las leyes del Electromagnetismo son válidas).

El experimento de Michelson-Morley y otros numerosos experimentos en los últimos cien años han mostrado que la segunda conclusión es falsa. La luz viaja con velocidad c en todas las direcciones en muchos sistemas de referencia diferentes.

La teoría de la Relatividad Especial de Einstein está basada en la aceptación de este hecho. Einstein propuso dos postulados, o axiomas, expresando su convicción de que todas las leyes físicas, incluyendo Mecánica y Electromagnetismo, deberían ser válidas en una familia completa de sistemas de referencia. A partir de estos dos postulados él desarrolló su Teoría Especial de la Relatividad.

Antes de establecer los dos postulados de la Relatividad es conveniente ampliar la definición de un sistema inercial.

Un sistema inercial es cualquier sistema de referencia (es decir, sistema de coordenadas x,y,z y tiempo t) donde se cumplen todas las leyes de la Física en su forma más simple.

Nótese que aún no hemos dicho qué son “todas las leyes de la Física”; en gran parte Einstein usó sus postulados para deducir cuáles podían ser las leyes correctas de la Física. Resulta que una de las leyes que sobrevive de la Física Clásica a la Relatividad es la primera ley de Newton. Así, nuestros recientemente definidos sistemas inerciales son de hecho los familiares sistemas “desacelerados”, donde un

cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza se mueve con velocidad constante. Como antes, un sistema de referencia ligado a la Tierra es un sistema inercial (hasta el grado en que ignoremos las pequeñas aceleraciones debidas a la rotación de la Tierra y al movimiento orbital); un sistema de referencia ligado a una mesa giratoria rotando rápidamente no es un sistema inercial.

Nótese también que al definir un sistema inercial hemos especificado que las leyes de la Física deben cumplirse “en su forma más simple”. Esto es porque uno puede algunas veces modificar las leyes físicas de modo que se cumplan también en sistemas no inerciales. Por ejemplo, introduciendo una fuerza centrífuga ficticia uno puede hacer que las leyes de la Estática sean válidas en un sistema rotatorio. Es para excluir este tipo de modificación para lo que hemos añadido la calificación “en su forma más simple”.

El primer postulado de la relatividad afirma que hay una familia completa de sistemas inerciales:

PRIMER POSTULADO DE LA RELATIVIDAD

Si S es un sistema inercial y si un segundo sistema inercial S' se mueve con velocidad constante respecto a S , entonces S' es también un sistema inercial.

Podemos reenunciar este postulado para decir que las leyes de la Física son invariantes cuando cambiamos desde un sistema de referencia a un segundo sistema que se mueve uniformemente respecto al primero. Esta propiedad es familiar en la Mecánica Clásica, pero en Relatividad se postula para todas las leyes de la Física, no sólo la Mecánica Clásica.

El primer postulado a menudo es parafraseado como sigue: “No hay nada semejante al movimiento absoluto”. Para entender lo que significa, considérese un sistema S' unido a un cohete moviéndose a velocidad constante respecto a un sistema S anclado a la Tierra. La cuestión que queremos preguntar es: ¿Hay algún sentido científico con el que podamos decir que S' está realmente moviéndose y que S es realmente estacionario (o, quizás, al revés)? Si la respuesta fuese “Sí”, podríamos decir que S está en reposo absoluto y que cualquier cosa moviéndose respecto a S está en movimiento absoluto. Sin embargo, el primer postulado de la Relatividad garantiza que esto es imposible: Todas las leyes observables por un científico ligado a la Tierra en S son igualmente observables por un científico en el cohete S' ; cualquier experimento que pueda ser realizado en S puede ser igualmente realizado en S' . Así, ningún experimento puede mostrar que un sistema está realmente moviéndose. Respecto a la Tierra, el cohete está moviéndose; respecto al cohete, la Tierra está moviéndose; y esto es todo lo que podemos decir.

Aún otra forma de expresar el primer postulado es decir que entre la familia de sistemas inerciales no hay “sistema preferido”. Es decir, la Física no elige un sistema inercial particular para ser de alguna manera más especial que cualquier otro sistema.

El segundo postulado identifica una de las leyes que se cumplen en todos los

sistemas inerciales:

SEGUNDO POSTULADO DE LA RELATIVIDAD

En todos los sistemas inerciales, la luz viaja a través del vacío con la misma velocidad, $c = 299792.458$ m/s en cualquier dirección.

Este postulado es, por supuesto, la expresión formal del resultado de Michelson-Morley. Podemos decir brevemente que se afirma la universalidad de la velocidad de la luz c .

El segundo postulado va en contra de nuestra experiencia normal. Sin embargo, es ahora un hecho experimental firmemente establecido. Cuando exploremos las consecuencias de los dos postulados de la Relatividad vamos a encontrar varios efectos inesperados que pueden ser difíciles de aceptar al principio. Todos estos efectos (incluyendo el segundo postulado en sí mismo) tienen la peculiar propiedad de que llegan a ser importantes sólo cuando los cuerpos viajan a velocidades razonablemente cercanas a la velocidad de la luz. Bajo condiciones normales, a velocidades terrestres, estos efectos simplemente son de magnitud despreciable. En este sentido, ninguna de las sorprendentes consecuencias de la Relatividad de Einstein contradice realmente nuestra experiencia diaria.

11.2 Medición del tiempo

Antes de que comencemos a explorar las consecuencias de los postulados de la Relatividad tenemos que decir algo sobre la medición del tiempo. Vamos a encontrar que el tiempo de un suceso puede ser diferente cuando se mide desde diferentes sistemas de referencia. Siendo este el caso, debemos primero estar bastante seguros de que sabemos lo que queremos decir por medición del tiempo en un único sistema.

Está implícito en el segundo postulado de la Relatividad, con su referencia a la *velocidad* de la luz, que podemos medir distancias y tiempos. En particular, suponemos admitido que tenemos acceso a varios relojes precisos. Estos relojes no tienen que ser todos iguales; pero cuando todos son llevados al mismo punto en el mismo sistema inercial y son sincronizados deben, por supuesto, coincidir.

Consideremos ahora un único sistema inercial S , con origen O y ejes $OXYZ$. Imaginemos una observadora sentada en O y equipada con uno de nuestros relojes. Usando su reloj, la observadora puede cronometrar fácilmente cualquier suceso, como una pequeña explosión, en la proximidad inmediata de O , puesto que verá (o escuchará) el suceso en el momento que ocurra. Cronometrar un suceso lejos de O es más difícil, ya que la luz (o el sonido) del suceso tiene que viajar a O antes de que nuestra observadora pueda sentirlo. Para evitar esta complicación, dejamos a nuestra observadora contratar un gran número de colaboradores, a cada uno de los cuales equipa con un reloj preciso y le asigna una posición fija y conocida en el sistema de coordenadas S , como se muestra en la figura 11.2.

Una vez que los ayudantes están en posición, ella puede comprobar que sus relojes siguen sincronizados haciendo a cada ayudante enviar un rayo de luz en un momento

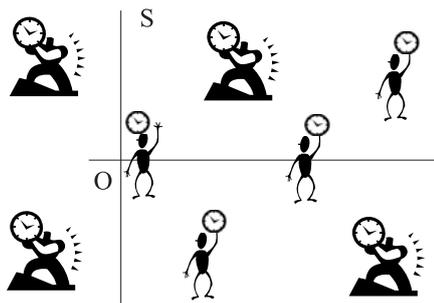


Figura 11.1: La observadora O da a cada uno de sus ayudantes un reloj.

determinado; como la luz viaja a la velocidad conocida c (segundo postulado), ella puede calcular el tiempo en el que la luz alcanza O y, por lo tanto, comprobar el estado del reloj del ayudante.

Con suficientes ayudantes, estacionados lo suficientemente cerca unos de otros, podemos decir que hay un ayudante cerca de cualquier suceso para cronometrarlo, efectiva e instantáneamente. Una vez que lo ha cronometrado puede, en su tiempo libre, informar a todos los demás del resultado por cualquier medio conveniente (por teléfono, por ejemplo). De esta forma, a cada evento se le puede asignar un tiempo t , como medido en el sistema S .

Cuando hablamos de un sistema inercial S siempre tendremos en mente un sistema de ejes $OXYZ$ y un equipo de observadores que están estacionados en reposo a lo largo de S y equipados con relojes sincronizados. Esto nos permite hablar de la posición $R = (x, y, z)$ y el tiempo t de cualquier suceso, respecto al sistema S .

11.3 La Relatividad del tiempo. Dilatación del tiempo

Estamos ahora listos para comparar medidas de tiempos hechas por observadores en dos sistemas inerciales diferentes. Para este fin imaginamos dos sistemas familiares, S (ligado a tierra) y S' (ligado a un tren que se mueve a velocidad constante v respecto a tierra). Consideremos un “experimento imaginario” en el que hay un observador en reposo en el tren, sentado en el suelo del vagón, bajo un espejo montado en el techo, que se encuentra a una altura h . Visto desde el sistema S' (fijado al tren) un pulso de luz viaja directo al espejo y es reflejado al llegar a este, volviendo a su punto de partida en el suelo. Podemos imaginar una célula fotoeléctrica preparada para dar un “beep” audible cuando la luz vuelve. Nuestro objetivo es averiguar el tiempo, medido en cada sistema, entre los dos sucesos: el “flash” cuando la luz deja el suelo y el “beep” cuando vuelve. Nuestro experimento, visto desde el sistema S' , se muestra en la figura 11.2.

Puesto que S' es un sistema inercial, la luz viaja una distancia total $2h$ a velocidad c . Por consiguiente, el tiempo del viaje completo es:

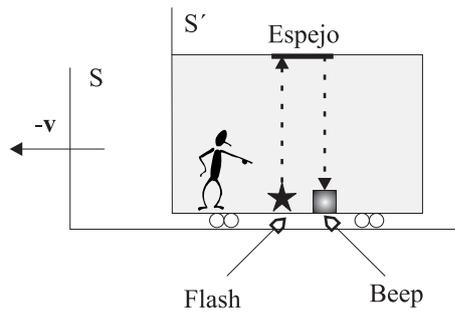


Figura 11.2: Experimento visto desde el suelo del tren.

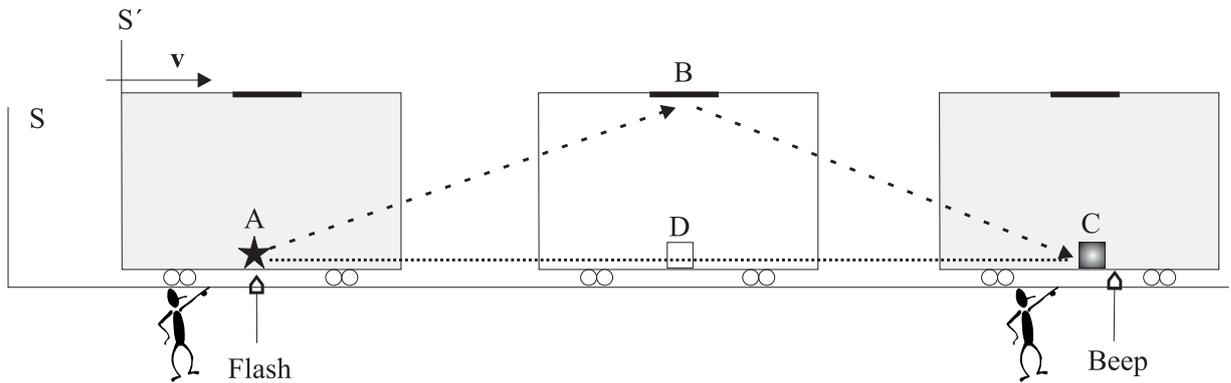


Figura 11.3: El mismo experimento visto desde tierra.

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}. \tag{11.1}$$

Este es el intervalo de tiempo que un observador en el sistema S' medirá entre el “flash” y el “beep”.

El mismo experimento, visto en el sistema inercial S (tierra), se muestra en la figura 11.3.

En este sistema la luz viaja a lo largo de los dos lados AB y BC del triángulo mostrado. Si denotamos como Δt el tiempo del viaje completo, medido en S , el tiempo para ir desde A hasta B es $\Delta t/2$. Durante este tiempo el tren viaja una distancia $v\Delta t/2$, y la luz, moviéndose con velocidad c , viaja una distancia $c\Delta t/2$. Nótese que es aquí donde aparecen los postulados de la Relatividad; *hemos tomado la velocidad de la luz como c tanto en S como en S'* . Las dimensiones del triángulo rectángulo ABD son, por consiguiente, como se muestra en la figura 11.4.

Aplicando el teorema de Pitágoras vemos que¹:

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2, \tag{11.2}$$

¹Aquí estamos considerando que la altura h del tren es la misma medida en cada sistema, S o S' . Probaremos que esto es correcto en un apartado posterior.

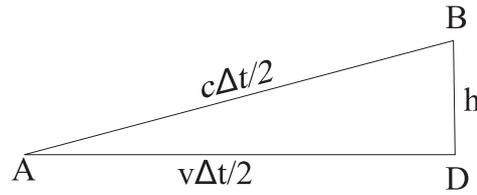


Figura 11.4: Dimensiones del triángulo ABD.

o, resolviendo para Δt ,

$$\Delta t = \frac{2h}{\sqrt{(c^2 - v^2)}} = \frac{2h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (11.3)$$

donde de nuevo hemos introducido la razón

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad (11.4)$$

de la velocidad del tren, v , a la velocidad de la luz, c . El tiempo Δt es el que los observadores en S medirán entre el “*flash*” y el “*beep*”.

Lo más importante y sorprendente sobre las dos respuestas (11.1) y (11.3) es que no son iguales. El tiempo entre los dos sucesos, el “*flash*” y el “*beep*” es diferente, medido en los sistemas S y S' . Específicamente,

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (11.5)$$

Hemos alcanzado este resultado para un “experimento imaginario” que consistiera en un haz de luz reflejado hasta una fotocélula. Sin embargo, la conclusión se aplica a cualesquiera dos eventos que ocurran en el mismo sitio en el tren, no hace falta que se trate de luz. Suponed, por ejemplo, que dejamos caer un cuchillo en la mesa y un momento después dejamos caer un tenedor. En principio, al menos, podríamos preparar un haz de luz para que surgiera en el momento que el cuchillo aterriza, y podríamos colocar un espejo para reflejar la luz de modo que llegase justo cuando el tenedor aterriza. La relación (11.5) debe, entonces, aplicarse a estos dos sucesos. Ahora bien, las caídas del cuchillo y del tenedor no pueden estar afectadas por la presencia o ausencia de una lámpara de flash y una fotocélula; así, ninguno de los tiempos Δt o $\Delta t'$ pueden depender de si realmente hicimos el experimento con la luz y la fotocélula. Por tanto, la relación (11.5) se mantiene para cualesquiera dos sucesos que ocurran **en el mismo lugar del tren**.

La diferencia entre los tiempos medidos Δt y $\Delta t'$ es una consecuencia directa del segundo postulado de la Relatividad (en Física Clásica, $\Delta t = \Delta t'$, por supuesto). Se debería evitar pensar que los relojes en uno de nuestros sistemas deben estar funcionando mal de alguna manera; al contrario, era una parte central de nuestra argumentación el que todos los relojes estaban bien. Más aún, nuestra argumentación no hacía referencia al tipo de relojes usados. Así, la diferencia (11.5) se aplica

a todos los relojes. En otras palabras, el “tiempo en sí” medido en los dos sistemas es diferente. Discutiremos la evidencia experimental de este hecho sorprendente en breve.

Varias propiedades de la relación (11.5) merecen comentario. Primero, si nuestro tren está realmente en reposo ($v = 0$), entonces $\beta = 0$ y (11.5) nos dice que $\Delta t = \Delta t'$. Más aún, a velocidades terrestres normales, $v \ll c$ y $\beta \ll 1$; así, la diferencia entre Δt y $\Delta t'$ es muy pequeña.

EJEMPLO 9.1 *El piloto de un jet que viaja a 300 m/s constantes envía un timbrado a la cabina para que suene a intervalos de exactamente 1 hora (medida en el avión). ¿Cuál será el intervalo entre dos timbrados sucesivos medidos por dos observadores convenientemente situados en tierra? (Ignorar los efectos del movimiento de la Tierra; es decir, considerar la Tierra como un sistema inercial).*

El intervalo requerido entre dos timbrados viene dado por (11.5), con $\Delta t' = 1$ hora y $\beta = v/c = 10^{-6}$. Así

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx 1'00000000000005 \text{ horas.} \quad (11.6)$$

La diferencia entre los dos tiempos medidos es $5 \cdot 10^{-13}$ horas o $1'8$ nanosegundos (un nanosegundo, o ns, es 10^{-9} s). ¡Es fácil ver por qué los físicos clásicos no se han dado cuenta de este tipo de diferencia!

La diferencia entre Δt y $\Delta t'$ crece cuando v aumenta. En los modernos aceleradores de partículas es normal obtener electrones y otras partículas con velocidades de $0'99c$ y más. Si imaginamos repetir nuestro experimento con el sistema S' ligado a un electrón con $\beta = 0'99$, entonces (11.5) da

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (0'99)^2}} \approx 7\Delta t'. \quad (11.7)$$

Diferencias tan grandes como ésta son observadas rutinariamente por los físicos de partículas, como discutiremos en la próxima sección.

Si pusiéramos $v = c$ (es decir, $\beta = 1$), en la ecuación (11.5) obtendríamos el absurdo resultado $\Delta t = \Delta t'/0$; y si pusiéramos $v > c$ (es decir, $\beta > 1$), obtendríamos una respuesta imaginaria. Estos resultados ridículos indican que v siempre debe ser menor que c :

$$v < c. \quad (11.8)$$

Este es uno de los resultados más profundos de la Relatividad de Einstein: “**La velocidad de cualquier sistema inercial respecto a cualquier otro sistema inercial siempre debe ser menor que c** ”. En otras palabras, la velocidad de la luz, además de ser la misma en todos los sistemas inerciales, emerge como límite universal de velocidad para el movimiento relativo de sistemas inerciales.

El factor $1/\sqrt{1-\beta^2}$ que aparece en (11.5) surge en tantas fórmulas relativistas que tradicionalmente se le da su propio símbolo, γ :

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \quad (11.9)$$

Puesto que v es siempre más pequeña que c , el denominador en (11.9) es siempre menor o igual a 1 y, por tanto:

$$\gamma \geq 1. \quad (11.10)$$

El factor γ es igual a 1 si $v = 0$. Cuanto mayor hagamos v , mayor llega a ser γ ; y si v se aproxima a c , el valor de γ aumenta sin límite.

En términos de γ , (11.5) puede ser reescrita:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \geq \Delta t'. \quad (11.11)$$

Es decir, Δt es siempre mayor o igual a $\Delta t'$. Esta asimetría puede parecer sorprendente, e incluso violar los postulados de la Relatividad, puesto que sugiere un papel especial para el sistema S' . De hecho, sin embargo, así es justo como debería ser. En nuestro experimento, el sistema S' es especial, puesto que es el único sistema inercial donde los dos sucesos -el “*flash*” y el “*beep*”- ocurren en el mismo lugar. Esta simetría estaba implícita en las figuras 11.2 y 11.3, que mostraban **un** observador midiendo Δt (puesto que ambos sucesos ocurrían en el mismo lugar en S') y **dos** observadores midiendo Δt (puesto que los dos sucesos eran en lugares diferentes en S). Para enfatizar esta asimetría el tiempo $\Delta t'$ puede ser renombrado como Δt_0 y (11.11) reescrita como

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \geq \Delta t_0. \quad (11.12)$$

El subíndice 0 en Δt_0 indica que Δt_0 es el tiempo indicado por un reloj que está en reposo en el sistema especial donde los dos sucesos ocurrían en el mismo lugar. Este tiempo es llamado a menudo *tiempo propio* Δt_0 . El efecto que se da en (11.12) es llamado *dilatación del tiempo*.

El tiempo propio Δt_0 es el tiempo indicado por el reloj en el tren en movimiento (movimiento respecto a S), es decir, Δt es el tiempo mostrado por los relojes en reposo en tierra (sistema S). Puesto que $\Delta t_0 \leq \Delta t$, la relación (11.12) puede ser parafraseada diciendo que “un reloj que se mueve se observa que funciona más lentamente”.

Finalmente deberíamos resaltar la simetría fundamental entre cualesquiera dos sistemas inerciales. Elegimos llevar a cabo nuestro experimento con el “*flash*” y el “*beep*” en un punto del tren (sistema S'), y encontramos que $\Delta t > \Delta t'$. Sin embargo, podríamos haber hecho las cosas al revés: si un observador ligado a tierra (en reposo en S) hubiera realizado el mismo experimento con un haz de luz y un espejo, el “*flash*” y el “*beep*” hubieran ocurrido en el mismo punto en tierra y

habríamos encontrado que $\Delta t' \geq \Delta t$. El gran mérito de escribir la fórmula de la dilatación del tiempo en la forma (11.12), $\Delta t = \gamma \Delta t_0$, es que evita el problema de recordar qué sistema es S y cuál S' ; el subíndice 0 siempre identifica el tiempo propio, medido en el sistema en el que los dos sucesos ocurren en el mismo punto.

11.3.1 Evidencia experimental de la dilatación del tiempo

En su artículo original sobre la Relatividad, Einstein predijo el efecto que ahora es llamado dilatación del tiempo. En esa época no había evidencia para apoyar la predicción, y pasarían muchos años antes de que alguna estuviera próxima. De hecho, sólo recientemente, con la llegada de los relojes atómicos, la verificación directa usando relojes hechos por el hombre ha sido posible.

La primera prueba de este tipo fue llevada a cabo en 1971. Cuatro relojes atómicos portátiles fueron sincronizados con un reloj de referencia en el Observatorio Naval de EE.UU. en Washington. Estos cuatro relojes fueron llevados alrededor del mundo en un avión y devueltos al Observatorio Naval. La discrepancia entre el reloj de referencia y los relojes portátiles después de su viaje fue predicha (usando la Relatividad) como

$$275 \pm 21ns, \quad (11.13)$$

mientras que la discrepancia observada (promediada entre los cuatro relojes portátiles) era²

$$273 \pm 7ns. \quad (11.14)$$

Debemos mencionar que el excelente acuerdo entre (11.13) y (11.14) es más que una prueba de la diferencia del tiempo (11.12), predicha por la Relatividad Especial. Los efectos gravitacionales, que requieren del empleo de la Relatividad General, contribuyen en gran parte a la discrepancia predicha (11.13). Así, este bonito experimento es una confirmación de la Relatividad General y de la Especial.

Pruebas mucho más simples de la dilatación del tiempo, y pruebas incluyendo dilataciones mucho mayores, son posibles usando los relojes naturales dados por partículas subatómicas inestables. Por ejemplo, el mesón cargado π , o pión, es una partícula que se forma en colisiones entre muchos núcleos atómicos moviéndose rápidamente. El pión tiene un tiempo medio de vida definido, tras el cual se desintegra en otras partículas subatómicas, y uno puede usar esta vida media como un tipo de reloj natural.

²La prueba realmente fue llevada a cabo dos veces, volando una vez al Este y otra al Oeste, con acuerdo satisfactorio en ambos casos. Los resultados dados aquí son del más decisivo vuelo hacia el Oeste. Para más detalles, ver J. C. Hafele y R. E. Keating, *Science*, vol. 177, p.166 (1.972). Puesto que la precisión de este experimento original ha sido cuestionada, debemos enfatizar que el experimento ha sido repetido muchas veces, con precisión mejorada, y ahora no hay duda de que las observaciones apoyan las predicciones de la Relatividad

Una forma de caracterizar la duración de la vida de una partícula inestable es la **semivida**³ $t_{1/2}$, que es el tiempo tras el cual la mitad de una gran cantidad de las partículas en cuestión habrá desaparecido. Por ejemplo, la semivida del pión es

$$t_{1/2} = 1'8 \cdot 10^{-8} s. \quad (11.15)$$

Esto significa que si uno empieza en t_0 con N_0 piones, entonces tras $1'8 \cdot 10^{-8}$ s la mitad de ellos se habrán desintegrado y sólo quedarán $N_0/2$. Tras otros $1'8 \cdot 10^{-8}$ s, la mitad de esos $N_0/2$ habrán desaparecido y sólo quedarán $N_0/4$. Tras otros $1'8 \cdot 10^{-8}$ s, sólo $N_0/8$ quedarán. Y así sucesivamente. En general, después de n semividas, $t = n t_{1/2}$, el número de partículas que quedan será $N_0/2^n$.

En los laboratorios de física de partículas los piones son producidos en gran número de colisiones entre protones (los núcleos de los átomos de hidrógeno) y otros núcleos varios. Es normalmente conveniente llevar a cabo los experimentos con los piones a una buena distancia de donde son producidos, y a los piones se les permite, por tanto, ir por una tubería de evacuación al área experimental. En el Fermilab, cerca de Chicago, los piones se hacen viajar muy cerca de la velocidad de la luz, siendo un típico valor $v = 0'9999995c$, y la distancia que deben viajar hasta el área experimental es sobre $L = 1km$. Vamos a considerar el vuelo de estos piones, primero desde la (incorrecta) visión clásica sin dilatación del tiempo, y luego desde la (correcta) visión relativista.

Visto desde el laboratorio, el tiempo de vuelo de los piones es:

$$T = \frac{L}{v} \approx \frac{10^3 m}{3 \cdot 10^8 m/s} = 3'33 \cdot 10^{-6} s. \quad (11.16)$$

Un físico clásico, despreocupado por cualquier noción de la relatividad del tiempo, compararía éste con la semivida (11.15) y calcularía que $T \approx 183t_{1/2}$. Es decir, el tiempo requerido para que los piones alcancen el área experimental es 183 semividas. Por consiguiente, si N_0 es el número original de piones, el número que sobrevivirá al viaje sería $N = N_0/2^{183} \approx (8'2 \cdot 10^{-56})N_0$. Para propósitos prácticos ningún pión alcanzaría el área experimental. Esto sería obviamente un modo absurdo de hacer experimentos con piones, y no es lo que ocurre realmente.

En Relatividad, lo sabemos ahora, el tiempo depende del sistema en el que se mide, y debemos considerar cuidadosamente los sistemas a los que se refieren los tiempos T y $t_{1/2}$. El tiempo T en (11.16) es, por supuesto, el tiempo de vuelo de los piones medido en un sistema ligado al laboratorio. Para enfatizar esto reescribimos (11.16) como

$$T_{laboratorio} = 3'3 \cdot 10^{-6} s. \quad (11.17)$$

Por otra parte, la semivida $t_{1/2} = 1'8 \cdot 10^{-8} s$ se refiere al tiempo “visto” por los piones; es decir, $t_{1/2}$ es la semivida medida en un sistema ligado a los piones,

³Una caracterización alternativa es la vida media τ , que difiere de $t_{1/2}$ por un factor constante: $\tau = t_{1/2}/\ln 2$.

el sistema de reposo de los piones (este es un hecho experimental: las semividas dadas por los físicos son las semividas propias, medidas en el sistema en el que las partículas están en reposo). Para enfatizar esto, escribimos (temporalmente):

$$t_{1/2}(\text{ reposo } \pi) = 1'8 \cdot 10^{-8} s. \quad (11.18)$$

Vemos que el argumento clásico anterior usaba dos tiempos T y $t_{1/2}$, medidos en sistemas inerciales diferentes. Un argumento correcto debe funcionar consistentemente en un sistema único, por ejemplo, el sistema del laboratorio. La semivida medida en el sistema del laboratorio viene dada por la fórmula de la dilatación del tiempo como γ veces la semivida (11.18). Con $\beta = 0'9999995$ es fácil ver que $\gamma = 1000$ y por tanto que

$$t_{1/2} \text{ laboratorio} = \gamma t_{1/2}(\text{ reposo } \pi) = 1000 (1'8 \cdot 10^{-8} s) = 1'8 \cdot 10^{-5} s. \quad (11.19)$$

Comparando (11.17) y (11.19) vemos que $T_{\text{laboratorio}} \approx 0'2 t_{1/2} \text{ laboratorio}$. Es decir, el vuelo de los piones por la tubería dura sólo un quinto de la semivida relevante. En este tiempo se pierden muy pocos piones, y casi todos alcanzan el área experimental (el número que sobrevive es $N = N_0/2^{0'2} \approx 0'9 N_0$). Esto es lo que pasa realmente en todos los laboratorios de Física de Partículas, y que constituye una fuerte evidencia de la relatividad del tiempo, como predijo primeramente Einstein en 1.905.

EJEMPLO 9.2 *La partícula lambda (Λ) es una partícula subatómica inestable que se desintegra en un protón y un pión ($\Lambda \rightarrow p + \pi$) con una semivida de $t_{1/2} = 1'7 \cdot 10^{-10} s$. Si varias lambdas son creadas en una colisión nuclear, todas con velocidad $v = 0'6c$, ¿cuánto viajarán antes de que la mitad de ellas desaparezcan?*

La semivida medida en el laboratorio es $\gamma t_{1/2}$ (puesto que $t_{1/2}$ es la semivida propia, medida en el sistema en reposo de Λ). Por tanto, la distancia pedida es $v\gamma t_{1/2}$. Con $\beta = 0'6$,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1'25. \quad (11.20)$$

y la distancia requerida es

$$\text{distancia} = v\gamma t_{1/2} = (1'8 \cdot 10^8 m/s) 1'25 (1'7 \cdot 10^{-10} s) = 3'8 \text{ cm}. \quad (11.21)$$

Nótese cómo incluso con velocidades tan grandes como $0'6c$ el factor γ no es mucho mayor que 1, y el efecto de la dilatación del tiempo no es dramático. Nótese también que una distancia de unos pocos centímetros es mucho más fácil de medir que un tiempo del orden de $10^{-10} s$; así, la medida de la longitud recorrida por una partícula inestable es a menudo la forma más fácil de hallar su semivida.

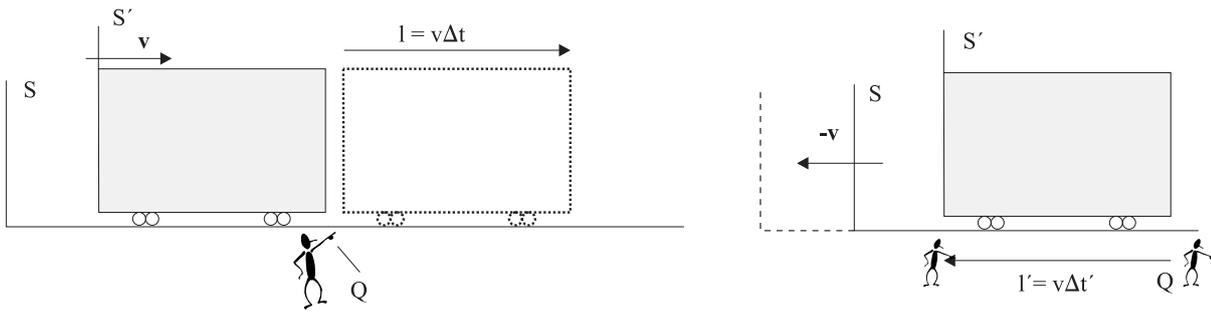


Figura 11.5: Visto desde S el tren se mueve una distancia $v\Delta t$ hacia la derecha. Visto desde S' el sistema S y el observador Q se mueven una distancia $v\Delta t'$ hacia la izquierda.

11.4 Contracción de la longitud

Los postulados de la Relatividad nos han llevado a concluir que el tiempo depende del sistema de referencia en el que se mide. Ahora podemos usar este hecho para mostrar que lo mismo debe aplicarse a las distancias. La distancia medida entre dos sucesos depende del sistema de referencia respecto al que se mide. Mostraremos esto con otro “experimento imaginario”. En el análisis de este experimento ideal será importante reconocer que, incluso en Relatividad, la familiar relación cinemática distancia = velocidad \times tiempo es válida en cualquier sistema inercial (con todas las cantidades medidas en ese sistema), puesto que es sólo la definición de la velocidad en ese sistema.

Imaginemos de nuevo nuestros dos sistemas, S fijo al suelo y S' fijo a un tren que viaja a velocidad v respecto al suelo; y ahora imaginemos observadores en S y en S' midiendo la longitud del tren. Para un observador en S' esta medida es fácil puesto que para él el tren está en reposo y puede tomarse todo el tiempo que necesite para medir la longitud l' con una regla precisa. Para un observador Q en el suelo la medición es más difícil, puesto que el tren está moviéndose. Quizás, el procedimiento más simple es cronometrar el tren mientras pasa por Q :

Si t_1 y t_2 son los tiempos a los cuales el principio y el final del tren pasan por Q y si $\Delta t = t_2 - t_1$, entonces Q puede calcular la longitud l (medida en S) como

$$l = v\Delta t. \quad (11.22)$$

Para comparar esta respuesta con l' notamos que los observadores en el tren podrían haber medido l' por un procedimiento similar. Visto desde el tren, el observador Q en el suelo está moviéndose hacia la izquierda con velocidad⁴ v , y los observadores en el tren pueden medir el tiempo para que Q se mueva del principio al final del tren como se observa en la figura 11.4.

⁴Estamos suponiendo que la velocidad de S respecto a S' es la misma que la de S' respecto a S . Esto viene de la simetría básica entre S y S' requerida por los postulados de la Relatividad

Esto requeriría dos observadores en el tren, uno en el frente (Q'_1) y otro al final (Q'_2). Si llamamos t'_1 al tiempo que marca el reloj de Q'_1 cuando Q pasa frente a él, y t'_2 al tiempo que marca el reloj de Q'_2 al pasar Q por su lado, entonces $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ es el tiempo que tarda Q (con velocidad v) en recorrer la longitud del tren. Por tanto

$$l' = v\Delta t'. \quad (11.23)$$

Comparando (11.22) y (11.23) vemos inmediatamente que puesto que los tiempos Δt y $\Delta t'$ son diferentes, lo mismo debe ser cierto de las longitudes l y l' . Para calcular la diferencia necesitamos relacionar Δt y $\Delta t'$ usando la fórmula de la dilatación del tiempo. En este experimento los dos sucesos de interés, **Q al principio del tren** y **Q al final del tren**, ocurren en el mismo sitio en S (donde Q está en reposo). Por consiguiente, Δt es el tiempo propio y la fórmula de dilatación del tiempo implica que $\Delta t' = \gamma\Delta t$. Comparando (11.22) y (11.23) vemos que

$$l = \frac{l'}{\gamma} \leq l'. \quad (11.24)$$

La longitud del tren medida en S es menor (o igual, aunque la igualdad sólo se da si $v = 0$) a la longitud medida en S' .

Como la dilatación del tiempo, este resultado es asimétrico, reflejando la asimetría de nuestro experimento: el sistema S' es especial puesto que es el único sistema donde el objeto medido (el tren) está en reposo (podríamos, por supuesto, haber hecho el experimento al revés; si hubiésemos medido la longitud de una casa en reposo en S los papeles de l y l' en (11.24) se habrían invertido). Para resaltar esta asimetría y para evitar confusión sobre cuál sistema es cuál, es buena idea reescribir (11.24) como

$$l = \frac{l_0}{\gamma} \leq l_0, \quad (11.25)$$

donde el subíndice 0 indica que l_0 es la longitud de un objeto medido en su sistema de reposo mientras l se refiere a la longitud medida en cualquier otro sistema. La longitud l_0 suele ser llamada **longitud propia** del objeto. Puesto que $l \leq l_0$, al efecto implicado por (11.25) se le llama a menudo **contracción de la longitud** (o contracción de Lorentz, o contracción de Lorentz-Fitzgerald, por los dos físicos que sugirieron por primera vez que debía haber algún efecto semejante). El efecto puede ser libremente descrito diciendo que “un objeto en movimiento se observa como contraído”.

11.4.1 Evidencia experimental de la contracción de la longitud

Como la dilatación del tiempo, la contracción de la longitud es un efecto real que está bien establecido experimentalmente. Quizás la evidencia más simple viene del

mismo experimento discutido en conexión con la dilatación del tiempo, en el que los piones inestables volaban por una tubería desde la colisión que los produce hasta el área experimental. Visto desde el sistema del laboratorio observamos que la dilatación del tiempo aumenta la semivida de los piones por un factor γ , de $t_{1/2}$ a $\gamma t_{1/2}$. En el ejemplo discutido era este aumento lo que permitía a la mayoría de los piones completar el viaje al área experimental antes de que desaparecieran.

Supóngase, sin embargo, que viésemos el mismo experimento desde el sistema de reposo de los piones. En este sistema los piones están estacionarios y no hay dilatación del tiempo para aumentar su semivida. Así que, ¿cómo alcanzan el área experimental? La respuesta es que en este sistema la tubería está moviéndose, y la contracción de la longitud reduce su longitud por el mismo factor γ , de L a L/γ . Así, los observadores en este sistema dirían que es la contracción de la longitud lo que permite a los piones alcanzar el área experimental. Naturalmente, el número de piones que completan el viaje es el mismo cualquiera que sea el sistema que usemos para el cálculo.

EJEMPLO 9.3 *Un explorador del espacio de una era futura viaja a la estrella más cercana, Alfa-Centauro, en un cohete con velocidad $v = 0'9c$. La distancia de la Tierra a la estrella, medida desde la Tierra, es $L = 4$ años-luz (o $4c$ años). ¿Cuál es la distancia vista por el explorador, y cuánto diría él que dura el viaje a la estrella?*

La distancia $L = 4c$ años es la distancia propia entre la Tierra y la estrella (que asumimos que están en reposo relativo). Así que la distancia vista desde el cohete viene dada por la fórmula de contracción de longitud como:

$$L_{\text{cohete}} = \frac{L_{\text{Tierra}}}{\gamma}. \quad (11.26)$$

Si $\beta = 0'9$ entonces $\gamma = 2'3$, así que

$$L_{\text{cohete}} = \frac{4c \text{ años}}{2'3} = 1'7c \text{ años}. \quad (11.27)$$

Podemos calcular el tiempo T del viaje de dos formas: visto desde el cohete, la estrella está inicialmente a $1'7c$ años y está aproximándose con velocidad $v = 0'9c$. Por tanto,

$$T_{\text{cohete}} = \frac{L_{\text{cohete}}}{v} = \frac{1'7c \text{ años}}{0'9c} = 1'9 \text{ años}. \quad (11.28)$$

(Nótese que los factores c se cancelan convenientemente cuando usamos c años y medimos las velocidades como múltiplos de c).

Alternativamente, medido desde el sistema Tierra, el viaje dura un tiempo

$$T_{\text{Tierra}} = \frac{L_{\text{Tierra}}}{v} = \frac{4c \text{ años}}{0'9c} = 4'4 \text{ años}, \quad (11.29)$$

pero debido a la dilatación del tiempo este es γ veces T_{cohete} , que es por tanto:

$$T_{\text{cohete}} = \frac{T_{\text{Tierra}}}{\gamma} = 1'9 \text{ años}, \quad (11.30)$$

de acuerdo con (11.28), por supuesto.

Nótese que la dilatación del tiempo (o la contracción de la longitud), permite un ahorro apreciable al piloto del cohete. Si vuelve puntualmente a la Tierra, entonces como resultado del viaje completo habrá envejecido sólo 3'8 años, mientras que su gemelo que se quedó habrá envejecido 8'8 años. Este resultado sorprendente, a veces conocido como la paradoja de los gemelos, es ampliamente verificado por los experimentos discutidos en la sección que trataba sobre la dilatación del tiempo. En principio, la dilatación del tiempo permitiría a los exploradores hacer en el tiempo de una vida viajes que requerirían cientos de años vistos desde la Tierra. ¡Puesto que esto requiere cohetes que viajan muy cerca de la velocidad de la luz, no es posible que pase pronto!

11.4.2 Longitudes perpendiculares al movimiento relativo

Hasta ahora hemos discutido longitudes que son paralelas a la velocidad relativa, tales como la longitud de un tren en su dirección de movimiento. ¿Qué les pasa a las longitudes perpendiculares a la velocidad relativa, como la altura del tren? Es fácil mostrar que para tales longitudes no hay contracción o expansión. Para ver esto, considérense dos observadores, Q en reposo en S y Q' en reposo en S' , y supóngase que Q y Q' son igual de altos en reposo. Ahora asumamos por un momento que hay una contracción de alturas análoga a la contracción de la longitud (11.25). Si esto es así, entonces visto desde Q , Q' será más bajo cuando se mueva. Podemos probar esta hipótesis haciendo que Q' sostenga un cuchillo afilado exactamente nivelado con la parte superior de su cabeza; si Q' es más bajo, Q se encontrará pelado (o algo peor) cuando el cuchillo pase.

Este experimento es completamente simétrico entre los dos sistemas S y S' : Hay un observador en reposo en cada sistema y la única diferencia está en que cada uno ve moverse al otro⁵. Por tanto, también debe ser verdad que visto por Q' , es Q quien es más bajo. Pero esto implica que el cuchillo no alcanzará a Q . Puesto que no puede ser cierto que Q esté tanto pelado como no, hemos llegado a una contradicción. Por un razonamiento similar no puede haber expansión y, de hecho, el cuchillo sostenido por Q' simplemente roza la cabeza de Q , visto en cualquier sistema. Concluimos que las longitudes perpendiculares al movimiento relativo son fijas; y la fórmula de la contracción de Lorentz (11.25) se aplica sólo a longitudes paralelas al movimiento relativo.

⁵Nótese que nuestros dos experimentos ideales anteriores eran asimétricos, requiriendo dos observadores en uno de los sistemas, pero sólo uno en el otro.

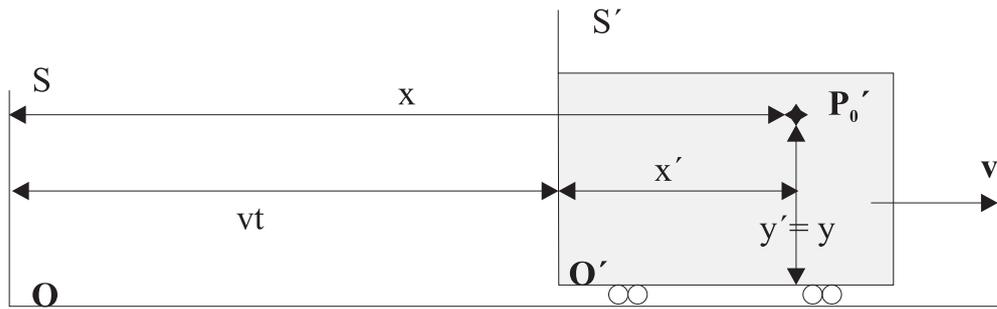


Figura 11.6: En física clásica las coordenadas de un suceso están relacionadas como se muestra en la figura.

11.5 La Transformación de Lorentz

Estamos ahora listos para contestar una importante cuestión general: si sabemos las coordenadas x, y, z y el tiempo t de un suceso, medido en un sistema S , ¿cómo podemos averiguar las coordenadas x', y', z' y t' del mismo suceso medido en un segundo sistema S' ? Antes de que veamos la respuesta correcta relativista a esta cuestión, examinaremos brevemente la respuesta clásica.

Consideraremos nuestros dos sistemas normales, S y S' , S ligado al suelo y S' ligado a un tren que viaja con velocidad v respecto a S , como se muestra en la figura 11.6.

Puesto que las leyes de la Física son todas independientes de nuestra elección del origen y la orientación, somos libres de elegir ambos ejes OX y $O'X'$ a lo largo de la misma recta, paralela a v , como se muestra. Podemos incluso elegir los orígenes del tiempo de modo que $t = t' = 0$ en el momento en el que O' pasa O . Nos referiremos a veces a esta colocación de sistemas S y S' como la configuración estándar.

Ahora consideraremos un suceso, como la explosión de un pequeño petardo, que sucede en la posición x, y, z y tiempo t medido en S . Nuestro problema es calcular, en términos de x, y, z, t , las coordenadas x', y', z', t' del mismo suceso, medido en S' -aceptando en principio las ideas clásicas de espacio y tiempo. Primero, puesto que el tiempo es una magnitud universal en la Física Clásica, sabemos que $t = t'$. Lo siguiente, de la figura 11.6 se ve fácilmente que $x' = x - vt$ e $y = y'$ (e igualmente, $z = z'$, aunque la coordenada z no se muestra en la figura). Así, de acuerdo con las ideas de la Física Clásica,

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t.\end{aligned}\tag{11.31}$$

Estas cuatro expresiones son llamadas la **Transformación de Galileo**. Trans-

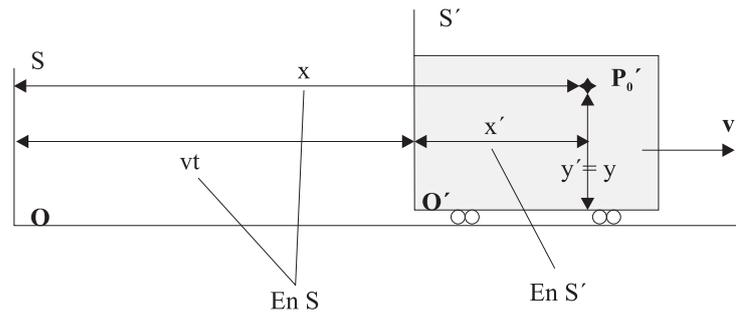


Figura 11.7: La coordenada x' es medida por S' . Las distancias x y vt son medidas en el mismo instante por S .

forman las coordenadas x, y, z, t de cualquier suceso observado en S en las correspondientes coordenadas x', y', z', t' observadas en S' .

Si se nos han dado las coordenadas x', y', z', t' y queremos hallar x, y, z, t , podríamos resolver las ecuaciones (11.31) para dar

$$\begin{aligned} x &= x' + vt, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= t'. \end{aligned} \tag{11.32}$$

Nótese que las ecuaciones (11.32) pueden ser obtenidas directamente de (11.31) cambiando x, y, z, t por x', y', z', t' y reemplazando v por $-v$. Esto es porque la relación de S a S' es la misma que la de S' a S excepto por un cambio en el signo de la velocidad relativa.

La transformación de Galileo (11.31) no puede ser la relación relativista correcta entre x, y, z, t y x', y', z', t' . (Por ejemplo, sabemos de la dilatación del tiempo que la ecuación $t = t'$ no puede ser correcta). Por otra parte, la transformación de Galileo se adecúa perfectamente con nuestra experiencia diaria y por tanto debe ser correcta (en una aproximación excelente) cuando la velocidad v es pequeña comparada con c . Así, la relación correcta entre x, y, z, t y x', y', z', t' tendrá que reducirse a la relación de Galileo (11.31) cuando v/c es pequeño.

Para hallar la relación correcta entre x, y, z, t y x', y', z', t' , consideramos el mismo experimento que antes, que se muestra de nuevo en la figura 11.7.

Hemos dicho antes que las distancias perpendiculares a v son las mismas medidas en S y en S' . Así que

$$y' = y \quad ; \quad z' = z, \tag{11.33}$$

exactamente como en la transformación de Galileo. Para encontrar x' es útil preparar la explosión cuyas coordenadas estamos discutiendo para que produzca una pequeña quemadura en la pared del tren en el punto P' donde ocurre. La distancia horizontal

del origen O' a la marca en P' , medida en S' , es precisamente la coordenada deseada x' . Mientras tanto, la misma distancia, medida en S , es $x - vt$ (puesto que x y vt son las distancias horizontales de O a P' y de O a O' en el instante t , medidas en S). Así que, de acuerdo con la fórmula de la contracción de la longitud (11.25), $x - vt = x'/\gamma$, es decir

$$x' = \gamma(x - vt). \quad (11.34)$$

Esto da x' en términos de x y t y es la tercera de nuestras cuatro ecuaciones requeridas. Nótese que si v es pequeña, entonces $\gamma \approx 1$ y la relación (11.34) se reduce a la primera de las relaciones de Galileo (11.31), como se pedía.

Finalmente, para hallar t' en términos de x, y, z, t usamos un truco simple. Podemos repetir el argumento que nos condujo a (11.34) pero con los papeles de S y S' invertidos. Es decir, dejamos a la explosión hacer una marca en el punto P de una pared fijada a S y, razonando como antes, tenemos que

$$x = \gamma(x' + vt'). \quad (11.35)$$

(Esto se puede obtener directamente de (11.34) cambiando x, t por x', t' y reemplazando v por $-v$). La ecuación (11.35) no es aún el resultado buscado, pero podemos combinarlo con (11.34) para eliminar x' y hallar t' . Insertando (11.34) en (11.35), obtenemos

$$x = \gamma[\gamma(x - vt) + vt']. \quad (11.36)$$

Despejando t' tenemos

$$t' = \gamma t - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma v} x \quad (11.37)$$

o, después de algo de álgebra

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right). \quad (11.38)$$

Esta es la expresión requerida para t' en términos de x y t . Cuando v/c es mucho menor que 1 podemos despreciar el segundo término y, puesto que $\gamma \approx 1$, obtenemos $t' \approx t$ de acuerdo con la transformación de Galileo como se pide.

Reuniendo (11.33), (11.34) y (11.38) obtendremos nuestras cuatro ecuaciones requeridas:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right). \end{aligned} \quad (11.39)$$

Estas ecuaciones son llamadas la **Transformación de Lorentz**, o la **Transformación de Lorentz-Einstein**, en honor al físico holandés Lorentz, que las propuso

por primera vez, y de Einstein, que fue el primero que las interpretó correctamente. La transformación de Lorentz es la modificación relativista correcta de la transformación de Galileo (11.31).

Si uno quiere saber x, y, z, t en términos de x', y', z', t' , se pueden permutar las variables con prima por aquéllas sin prima, y viceversa, y cambiar v por $-v$, para dar

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + vt'), \\y &= y', \\z &= z', \\t &= \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2}).\end{aligned}\tag{11.40}$$

Estas ecuaciones, a veces, son denominadas la transformación inversa de Lorentz.

La transformación de Lorentz expresa todas las propiedades de espacio y tiempo que siguen de los postulados de la Relatividad. De ellas uno puede calcular todas las relaciones cinemáticas entre medidas hechas en sistemas inerciales diferentes. En las próximas dos secciones damos algunos ejemplos de tales cálculos.

11.6 Aplicaciones de la transformación de Lorentz

En esta sección damos tres ejemplos de problemas que pueden ser analizados fácilmente usando la transformación de Lorentz. En los dos primeros retomamos dos resultados familiares; en el tercero analizamos una de las muchas “paradojas” de la Relatividad.

EJEMPLO 9.4 *Comenzando con las ecuaciones (11.39) de la transformación de Lorentz, hallar la fórmula de contracción de la longitud (11.25).*

Nótese que la fórmula de contracción de la longitud fue usada en nuestra obtención de la transformación de Lorentz. Así, este ejemplo no dará una nueva prueba de contracción de la longitud; será, más bien, una prueba consistente sobre la transformación de Lorentz, para verificar que devuelve el resultado del que fue obtenida. Sin embargo, uno puede también tomar la visión de que la transformación de Lorentz es en sí misma un hecho experimental bien establecido, del cual uno puede derivar legítimamente la fórmula de contracción de la longitud.

Imaginemos, como antes, medir la longitud de un tren (sistema S') que viaja a velocidad v respecto al suelo (sistema S). Si las coordenadas del final y del principio del tren son x'_2 y x'_1 , medidas en S' , entonces la longitud propia del tren (su longitud medida en su sistema de reposo) es

$$l_0 = l' = x'_2 - x'_1.\tag{11.41}$$

Para hallar la longitud l medida en S colocamos cuidadosamente dos observadores en el suelo para observar las coordenadas x_1 y x_2 del final y el principio del tren en

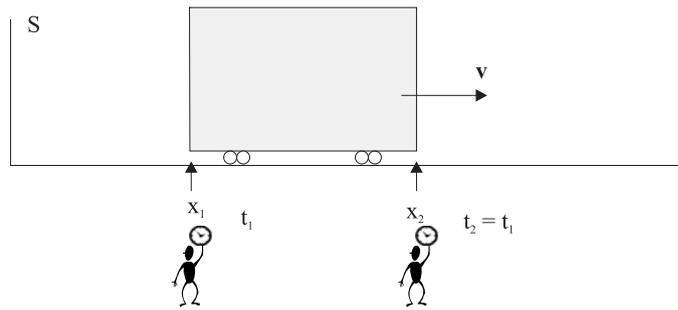


Figura 11.8: Si dos observadores miden x_1 y x_2 en el mismo instante ($t_1 = t_2$) entonces $l = x_2 - x_1$.

un tiempo t conveniente (estas dos medidas deben, por supuesto, hacerse al mismo tiempo t). En términos de estas coordenadas, la longitud l medida en S es

$$l = x_2 - x_1, \quad (11.42)$$

tal y como se muestra en la figura 11.8.

Ahora considérense los dos sucesos siguientes, con sus coordenadas medidas en S :

Suceso	Descripción	Coordenadas en S
1	Final del tren para el primer observador	x_1, t_1
2	Principio del tren para el segundo observador	$x_2, t_2 = t_1$

Podemos usar la transformación de Lorentz para calcular las coordenadas de cada suceso observado en S' :

Suceso	Coordenadas en S'
1	$x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1)$
2	$x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2)$

(No hemos listado los tiempos t'_1 y t'_2 puesto que no nos conciernen aquí). La diferencia de estas coordenadas es

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1). \quad (11.43)$$

(Nótese que los tiempos t_1 y t_2 se cancelan puesto que son iguales). Dado que las dos diferencias en (11.43) son respectivamente $l' = l_0$ y l , concluimos que $l_0 = \gamma l$ ó

$$l = \frac{l_0}{\gamma}, \quad (11.44)$$

como se pedía.

EJEMPLO 9.5 Usar la transformación de Lorentz para reconseguir la fórmula de la dilatación del tiempo (11.12).

En nuestra discusión de la dilatación del tiempo consideramos dos sucesos, un “flash” y un “beep”, que ocurrieran en el mismo lugar en el sistema S' ,

$$x'_{flash} = x'_{beep}. \quad (11.45)$$

El tiempo propio entre los dos sucesos era el tiempo medido en S' ,

$$\Delta t_0 = \Delta t' = t'_{beep} - t'_{flash}. \quad (11.46)$$

Para relacionar esto con el tiempo

$$\Delta t = t_{beep} - t_{flash}, \quad (11.47)$$

medido en S , es conveniente usar la transformación inversa de Lorentz (11.40), que da

$$t_{beep} = \gamma(t'_{beep} + \frac{vx'_{beep}}{c^2}), \quad (11.48)$$

y

$$t_{flash} = \gamma(t'_{flash} + \frac{vx'_{flash}}{c^2}), \quad (11.49)$$

Si tomamos la diferencia de estas dos ecuaciones, las coordenadas x'_{beep} y x'_{flash} se cancelan (puesto que son iguales) y obtenemos el resultado deseado,

$$\Delta t = t_{beep} - t_{flash} = \gamma(t'_{beep} - t'_{flash}) = \gamma\Delta t_0. \quad (11.50)$$

EJEMPLO 9.6 Una serpiente relativista de longitud propia 100 cm está moviéndose a velocidad $v = 0'6c$ hacia la derecha por una mesa. Un niño travieso, deseando molestar a la serpiente, sostiene dos hachas separadas 100 cm y planea soltarlas sobre la mesa simultáneamente de modo que el hacha izquierda caiga inmediatamente detrás de la cola de la serpiente. El niño razona como sigue: “La serpiente se mueve con $\beta = 0'6$. Por tanto, su longitud se contrae por un factor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0'36}} = \frac{5}{4}, \quad (11.51)$$

y su longitud (medida en el sistema del niño) es 80 cm. Esto implica que el hacha derecha caerá 20 cm enfrente de la serpiente, y la serpiente saldrá ilesa”. La visión del niño queda reflejada en la figura 11.9.

Por otra parte, la serpiente razona así: “Las hachas se acercan a mí con $\beta = 0'6$, y la distancia entre ellas está contraída a 80cm. Puesto que yo mido 100 cm, seré cortada en piezas cuando caigan”. Usar la transformación de Lorentz para resolver esta paradoja.

Elijamos dos sistemas coordenados como sigue: la serpiente está en reposo en el sistema S' con su cola en el origen $x' = 0$ y su cabeza en $x' = 100$. Las dos hachas

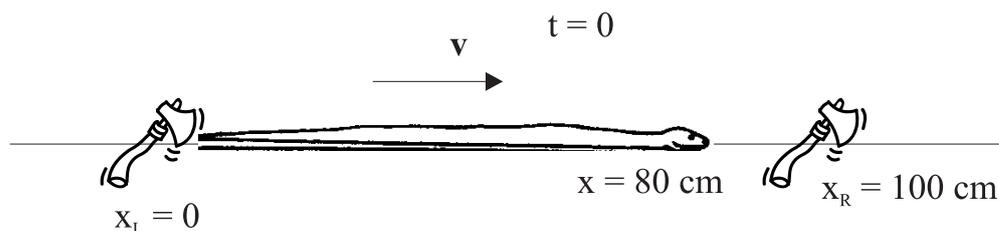


Figura 11.9: Visto por el niño las dos hachas caen simultáneamente en $t = 0$ separadas 100 cm. Dado que la serpiente mide 80 cm, ésta escapa ilesa.

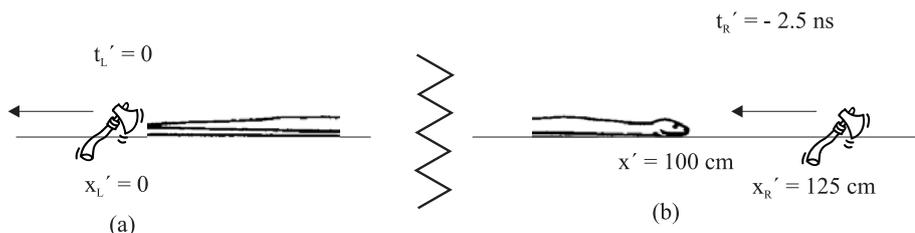


Figura 11.10: Observado por la serpiente, las dos hachas se están moviendo hacia la izquierda: El hacha izquierda cae antes que la derecha; aún cuando las hachas estén separadas sólo 80 cm, esto les permite caer con una separación de 125 cm.

están en reposo en el sistema S , la izquierda en el origen $x = 0$ y la derecha en $x = 100$ cm.

Observados en el sistema S las dos hachas caen simultáneamente en $t = 0$. En este tiempo la cola de la serpiente está en $x = 0$ y su cabeza debe, por tanto, estar en $x = 80$ cm (Puedes comprobar esto usando la transformación $x' = \gamma(x - vt)$, con $x = 80$ cm y $t = 0$; hallarás que $x' = 100$ cm como debe ser). Así, observado en S , el experimento es como se muestra en la figura 11.9.

En particular, la predicción del niño es correcta y la serpiente sale ilesa. Por tanto, el razonamiento de la serpiente debe estar mal.

Para entender qué está mal en el razonamiento de la serpiente, debemos examinar las coordenadas, especialmente los tiempos, en los cuales las dos hachas caen, observados en el sistema S' . El hacha izquierda cae en $t_L = 0$ y $x_L = 0$. De acuerdo con la transformación de Lorentz (11.39), las coordenadas de este suceso, visto desde S' , son

$$\begin{aligned} t'_L &= \gamma(t_L - \frac{vx_L}{c^2}) = 0, \\ x'_L &= \gamma(x_L - vt_L) = 0. \end{aligned} \quad (11.52)$$

Como se esperaba, el hacha izquierda cae inmediatamente detrás de la cola de la serpiente, en tiempo $t'_L = 0$, como se muestra en la figura 11.6.

Por otra parte, el hacha derecha cae en $t_R = 0$ y $x_R = 100$ cm. Así, visto en S' cae en un tiempo dado por la transformación de Lorentz como:

$$t'_R = \gamma\left(t_R - \frac{vx_R}{c^2}\right) = \frac{5}{4}\left(0 - \frac{(0'6c)(100cm)}{c^2}\right) = -2'5ns. \quad (11.53)$$

Vemos que, medidos en S' , las dos hachas no caen simultáneamente. Puesto que el hacha derecha cae antes que la izquierda, no tiene necesariamente que golpear a la serpiente, aún cuando estuvieran separadas 80cm (en este sistema). De hecho, la posición en la que cae el hacha derecha es dada por la transformación de Lorentz como

$$x'_R = \gamma(x_R - vt_R) = \frac{5}{4}(100cm - 0) = 125cm, \quad (11.54)$$

y en realidad el hacha no alcanza a la serpiente, como se muestra en la figura.

La resolución de esta paradoja, y de muchas paradojas similares, consiste en ver que dos sucesos que son simultáneos observados en un sistema, no son necesariamente simultáneos cuando se observan en un sistema diferente. Tan pronto como se reconoce que las dos hachas caen en tiempos diferentes en el sistema en reposo de la serpiente, no hay más problema en comprender cómo ambos pueden no alcanzar a la serpiente.

11.7 La fórmula de adición de la velocidades

En el Capítulo 2 discutimos la fórmula clásica de adición de velocidades. Ésta relaciona la velocidad \vec{u} de algún cuerpo o señal, respecto a un sistema S , y su valor \vec{u}' respecto a un segundo sistema S' : $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$, o equivalentemente:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}. \quad (11.55)$$

Aquí \vec{v} es la velocidad respecto de S' respecto a S , y la fórmula afirma que en la Física Clásica las velocidades relativas se suman y restan como vectores. Nótese que aquí, como en todos sitios, usamos \vec{u} y \vec{u}' para las velocidades de un cuerpo o señal respecto a los dos sistemas, mientras que \vec{v} denota la velocidad relativa entre los dos sistemas.

La fórmula clásica (11.55) no puede ser correcta, puesto que contradice la universalidad de la velocidad de la luz. En esta sección usaremos la transformación de Lorentz para obtener la fórmula relativista correcta de adición de velocidades.

Imaginemos un objeto móvil cuya velocidad queremos discutir (por ejemplo, este objeto podría ser un cohete, una partícula subatómica, o una señal de luz). Consideramos dos puntos vecinos en su camino, como se muestra en la figura 11.11

Denotamos por $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ las coordenadas de estos dos puntos, medidos en S , y por t_1 y t_2 los tiempos en los que el objeto pasa por ellos. La velocidad $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ medida en S viene entonces dada por

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad u_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}, \quad (11.56)$$

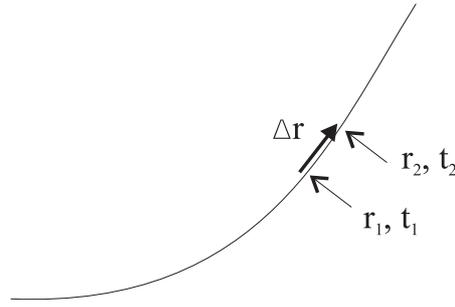


Figura 11.11: La velocidad de un cuerpo es el cociente entre el desplazamiento $\Delta \vec{r}$ y el tiempo empleado en recorrerlo, en el límite $\Delta t \rightarrow 0$.

donde $\Delta x = x_2 - x_1$, etc. (y estas ecuaciones deben, estrictamente hablando, ser válidas sólo en el límite en el que los dos puntos están juntos, $\Delta t \rightarrow 0$). La velocidad \vec{u}' respecto a S' se define de la misma forma usando las coordenadas y el tiempo medidos por S' .

Ahora podemos usar la transformación de Lorentz para relacionar las coordenadas y tiempos de S con los de S' , y entonces, usando la definición (11.56), relacionar las velocidades correspondientes. Primero, de acuerdo con la transformación de Lorentz (11.39):

$$\begin{aligned} x'_2 &= \gamma(x_2 - vt_2), \\ y'_2 &= y_2, \\ t'_2 &= \gamma(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}), \end{aligned} \quad (11.57)$$

y

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma(x_1 - vt_1), \\ y'_1 &= y_1, \\ t'_1 &= \gamma(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}). \end{aligned} \quad (11.58)$$

(Omitimos las ecuaciones para z , cuyas transformaciones son como las de y). Restando estas ecuaciones, hallamos que:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t), \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}). \quad (11.59)$$

De aquí podemos calcular las componentes de \vec{u}' . Primero

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - v\Delta t)}{\gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2})}, \quad (11.60)$$

o cancelando los factores γ y dividiendo arriba y abajo por Δt ,

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}. \quad (11.61)$$

Igualmente,

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2})}, \quad (11.62)$$

o dividiendo arriba y abajo por Δt ,

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{u_x v}{c^2})}. \quad (11.63)$$

Nótese que u'_y no es igual a u_y , aunque $\Delta y' = \Delta y$; esto es porque los tiempos $\Delta t'$ y Δt no son iguales.

Las ecuaciones (11.61) y (11.63), (y una ecuación similar a la de la u'_y para u'_z) son las **fórmulas relativistas de adición de velocidades**, o transformación de velocidad. Nótese que si u y v son mucho menores que c , podemos ignorar el término $u_x v/c^2$ en ambos denominadores y poner $\gamma \approx 1$ para dar $u'_x \approx u_x - v$ y $u'_y \approx u_y$. Estas son, por supuesto, las componentes de la fórmula clásica de adición $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$.

La transformación inversa de velocidad, dando \vec{u} en términos de \vec{u}' , puede ser obtenida de (11.61) y (11.63) intercambiando las variables “*prima*” y no “*prima*” y cambiando v por $-v$, de la forma normal.

EJEMPLO 9.7 *Un cohete que viaja a velocidad $0'8c$ respecto a la Tierra dispara hacia delante un rayo de partículas con velocidad $0'9c$ respecto al cohete. ¿Cuál es la velocidad de las partículas respecto a la Tierra?*

Sea S el sistema en el que la Tierra está en reposo y S' el del cohete, con ejes x y x' alineados con la velocidad del cohete. La velocidad relativa de los dos sistemas es $v = 0'8c$. Se nos da que las partículas viajan a lo largo del eje x' con velocidad $u' = 0'9c$ (respecto a S'), y queremos hallar su velocidad u respecto a S . La respuesta clásica es, por supuesto, que $u = u' + v = 1'7c$; es decir, puesto que las dos velocidades son colineales, u' y v simplemente se suman en Física Clásica.

La respuesta relativista correcta viene dada por la inversa de (11.61) (de la cual omitimos los subíndices x , puesto que todas las velocidades son a lo largo del eje x):

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{0'9c + 0'8c}{1 + 0'9 \cdot 0'8} = \frac{1'7}{1'72}c \approx 0'99c. \quad (11.64)$$

La característica principal de esta respuesta es que cuando “sumamos” $u' = 0'9c$ a $v = 0'8c$ relativistamente, obtenemos una respuesta que es menor que c . De hecho, es fácil mostrar que para cualquier valor de u' menor que c , la velocidad de u también es menor que c ; es decir, una partícula cuya velocidad es menor que c en un sistema, tiene velocidad menor que c en cualquier otro sistema.

EJEMPLO 9.8 *El cohete del ejemplo 9.7 dispara hacia delante una señal (por ejemplo, un pulso de luz) con velocidad c respecto al cohete. ¿Cuál es la velocidad de la señal respecto a la Tierra?*

En este caso $u' = c$. Así que de acuerdo con (11.64),

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + v/c} = c. \quad (11.65)$$

Es decir, cualquier cosa que viaje a la velocidad de la luz en un sistema, viaja también a la velocidad de la luz observado desde cualquier otro sistema (hemos probado esto aquí sólo para el caso de que \vec{u} tenga la misma dirección que \vec{v} . Sin embargo, el resultado es cierto para cualquier dirección). Podemos parafrasear esto diciendo que la velocidad de la luz es invariante cuando pasamos de un sistema a otro. Este es, por supuesto, el segundo postulado de la Relatividad, que nos condujo a la transformación de Lorentz.

11.8 Cuestiones y problemas

1. Dos sistemas de referencia S y S' están situados de forma que sus ejes OX y $O'X'$, OY y $O'Y'$, y OZ y $O'Z'$ son paralelos y orientados en el mismo sentido. El eje OY desliza con celeridad v sobre el $O'Y'$ en el sentido del eje $O'Y'$ negativo. Entonces, se verifica que:

$$\square y' = \gamma(y + vt) \quad ; \quad \square y' = \gamma(y - vt) \quad ; \quad \square y = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'^2\right)$$

2. De la Tierra sale un cohete hacia una galaxia próxima con celeridad $0.6c$. En cierto punto del camino su tripulante A (que partió con 25 años), se cruza con una nave que hace el viaje en sentido inverso a la misma celeridad. A le comunica al tripulante de la segunda nave (B) que su edad es de 30 años, cantidad que casualmente coincide con la que tenía B en ese momento, según su propio sistema de referencia. Cuando éste llega a la Tierra, ¿cuántos años han envejecido sus habitantes desde que salió la primera nave?

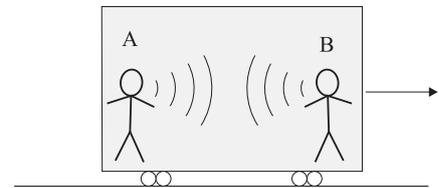
$$\square 12.5 \quad ; \quad \square 15 \quad ; \quad \square 20$$

3. Un tren relativista pasa por delante de una estación con velocidad $c/2$. En uno de los vagones hay dos pasajeros, A y B, que viajan juntos. A se dirige hacia el coche-bar a por algo de comer, quedándose B sentado. Según el reloj de B, desde que A se levantó hasta que volvió con la comida ha transcurrido un tiempo t_0 . ¿Cuánto tiempo ha transcurrido para un observador ligado a la estación?

$$\square \frac{3t_0}{2\sqrt{2}} \quad ; \quad \square \frac{2t_0}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \square \frac{4t_0}{\sqrt{15}}$$

4. Un tren relativista pasa por delante de una estación con una velocidad $v = c/2$. En uno de los vagones del tren, de longitud propia L , dos pasajeros, A y B, sentados en sendos extremos del vagón, y con una linterna cada uno, juegan a iluminarse con la luz de la linterna (ver figura). Sea t_{AB} el tiempo que tarda la luz en llegar de A a B respecto a un observador ligado a la estación. Entonces, $t_{AB} - t_{BA}$ es igual a

$$\square \frac{L}{c\sqrt{2}} \\ \square \frac{2L}{c\sqrt{3}} \\ \square \frac{2L}{c\sqrt{15}}$$

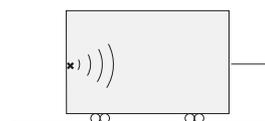


5. Un atleta relativista corre con celeridad constante por una pista rectilínea. Los observadores ligados a la pista miden siempre la misma frecuencia de palpación del atleta, con independencia de la celeridad de éste en sus carreras. ¿Cuál es la celeridad del atleta, si éste observa que su corazón palpita a un ritmo triple del ritmo de reposo?

$$\square c\sqrt{5}/3 \quad ; \quad \square c\sqrt{3}/2 \quad ; \quad \square c\sqrt{8}/3$$

6. Dos puntos A y B parten simultáneamente del origen de coordenadas de un sistema. A se mueve por el eje OX con celeridad constante $v = c/2$. B se mueve también por el eje OX con la misma celeridad, pero en sentido contrario. A y B ponen sus cronómetros a cero al partir de O . Cuando el cronómetro de A marca $1/3$ envía una señal luminosa. ¿Qué marca el cronómetro de B al recibir la señal?
- 1 ; 2 ; 3
7. Un barco se aleja en línea recta de la costa. En el sistema de referencia ligado al barco dos lámparas, una de ellas situada en proa (parte delantera) y otra en popa (parte trasera), producen sendos destellos luminosos. Según este mismo sistema de referencia los dos haces luminosos llegan a la vez al centro del barco. Entonces, para el sistema de referencia ligado a la costa:
- También llegan simultáneamente al centro del barco.
 No son simultáneos, al centro del barco llega primero el que salió de proa.
 No son simultáneos, al centro del barco llega primero el que salió de popa.
8. Cuando *Mon*, *Tor* y *Pin*, (tres antepasados nuestros) acabaron de desayunarse el mamut que habían cazado, pensaron en entretenerse poniendo a prueba sus conocimientos de relatividad. Para ello cada uno tomó un hueso sobrante del banquete y cogiendo carrerilla (todos la misma) lo lanzó intentando que desde el sistema de referencia ligado a Tierra la velocidad del hueso en el momento del lanzamiento formase un ángulo de 45° con la horizontal. En su propio sistema, *Pin* lo lanzó con un ángulo de 45° respecto a la horizontal, *Mon* con un ángulo mayor de 45° y *Tor* con un ángulo menor. Uno de ellos consiguió el objetivo, ¿quién?
- Mon* ; *Tor* ; *Pin*
9. Un objeto tiene forma de cubo, de volumen V , en el sistema de referencia ligado al propio objeto. Se traslada en la dirección de una diagonal de una de sus caras con celeridad $0.6c$ respecto a cierto sistema de referencia S . ¿Qué volumen tiene el objeto en el sistema S ?
- $4V/5$; $8V/5$; $4V$
10. Un vagón de tren de longitud propia l se mueve a velocidad $v = c/2$ respecto a la estación. En la parte trasera del mismo se enciende una luz. Según el sistema de referencia ligado a la estación, el tiempo que tarda en llegar a la parte delantera del vagón es:

$l\sqrt{3}/c$; $l\sqrt{2}/c$; $l\sqrt{5}/(c\sqrt{3})$



Capítulo 12

LA FÍSICA CUÁNTICA

12.1 Introducción

Hasta el capítulo 9 (incluido) hemos estudiado Física Clásica. En los dos últimos estudiamos la Relatividad Especial, que es una parte de la Física Moderna. La otra parte es la Física Cuántica, a la que dedicaremos lo que nos queda de curso. Pero antes de empezar volvamos, por última vez, la mirada a la Física Clásica. Toda ella está contenida en el conjunto de ecuaciones (12.1) a (12.8):

Bloque I:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_e; \quad (\text{ley de Gauss para el campo eléctrico}) \quad (12.1)$$

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0; \quad (\text{ley de Gauss para el campo magnético}) \quad (12.2)$$

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}; \quad (\text{ley de Faraday}) \quad (12.3)$$

$$\int_L \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S (\epsilon_0 \vec{E}) \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}; \quad (\text{ley de Ampère-Maxwell}) \quad (12.4)$$

$$\int_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{k} Q_g; \quad (12.5)$$

Bloque II:

$$\vec{F}_e = q_e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}); \quad (\text{ley de fuerza de Lorentz}) \quad (12.6)$$

$$\vec{F}_g = q_g \vec{G}; \quad (12.7)$$

Bloque III:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}_e + \vec{F}_g}{m}. \quad (\text{Segunda ley de Newton}) \quad (12.8)$$

La imagen que esta teoría nos da del mundo que nos rodea se vio en la primera parte del curso. Cuando los físicos del siglo XIX fueron capaces de establecer el conjunto de leyes de la Física Clásica pensaron que la Física había llegado a su fin. Tan sólo quedaba aplicar sus leyes al sistema bajo estudio para predecir así su evolución. De forma análoga, cuando se pensaba en hacer tecnología, se creía que ésta sólo surgiría de la aplicación “interesada” de estas leyes clásicas.

Había, sin embargo, un sistema sencillo pero muy interesante cuyo comportamiento no se podía explicar en base a las leyes clásicas: el átomo de hidrógeno. Éste, se sabía, consistía en una carga positiva y una carga negativa. En principio un sistema formado por dos cargas es el ejemplo más sencillo de aplicación de las ecuaciones (12.1) a (12.8). Lo primero que se pensó fue que el átomo de hidrógeno era algo así como un sistema planetario en miniatura, pero en lugar de estar sometido principalmente a la acción del campo gravitatorio (que sería debilísimo porque las masas del protón y el electrón son muy pequeñas), como ocurre con la Tierra y el Sol, estas dos cargas estarían ligadas por la fuerza electromagnética (muy superior a la gravitatoria en este caso). Cuando uno analiza el sistema electrón-protón bajo este supuesto se encuentra:

1. Que no es estable, esto es, que siempre el electrón acaba cayendo hacia el protón y que en este proceso de caída el sistema estaría emitiendo luz de forma continua.
2. Que no se pueden explicar los espectros atómicos, esto es, el que la luz que emite un átomo contenga unas longitudes de onda sí y otras no. En el modelo clásico se predice una emisión continua con todas las longitudes de onda.

Además del fracaso en su intento de explicar el átomo, la imagen clásica del universo chocaba con otros hechos muy importantes, a saber, el que la luz a veces se comportase como si se tratara de un chorro de partículas en vez de un campo electromagnético (una onda) y el que las partículas a veces presentasen fenómenos de interferencia, como si fuesen objetos muy extensos en el espacio, o sea, como si en realidad fuesen campos.

En este estado de cosas, entre los años 20 y 30 del siglo XX nace la Física Cuántica como consecuencia del trabajo de Bohr, Einstein, de Broglie, Schrödinger y Heisenberg principalmente. La Física Cuántica nos brinda una imagen del funcionamiento del mundo que nos rodea radicalmente distinta a la que muestra la Física Clásica. Las ideas que están detrás de esta teoría se apartan sensiblemente de aquellas a las que nos tiene acostumbrada la vida de cada día y el sentido común. Tanto es así que aunque la teoría cuántica tiene un extraordinario poder predictivo, aún es muy discutido su significado. Se sabe trabajar con ella y hacer predicciones muy precisas, pero ¿entienden los físicos realmente el significado de la Física Cuántica? Muchos

piensan que no, otros dicen que no hay nada que entender, ¡pero casi ninguno dice que sí!

El poco tiempo del que disponemos no ha permitido explicar con detalle las ideas de la Física Clásica; nos hemos contentado con dar una idea más o menos intuitiva y cualitativa de la misma, aunque hemos profundizado algo más en la Mecánica y las ondas. Sería por lo tanto ilusorio pretender una exposición detallada de la Física Cuántica, teoría mucho menos intuitiva, como decimos, que la Física Clásica. Sin embargo creemos absolutamente necesario dedicar unas palabras a esta teoría, ya del siglo pasado, y que hoy es la base de una parte importante de la ingeniería. Es clave en el funcionamiento de los semiconductores, con sus infinitas aplicaciones: láseres, imprescindibles en la transmisión de señales a través de fibras ópticas, en la medicina quirúrgica, en los lectores ópticos (CD-Rom, DVD), en metalurgia,...; diodos y transistores, pilares de cualquier dispositivo electrónico; en reactores nucleares, en importantísimas técnicas médicas como la resonancia magnética nuclear, etc. Como vemos, vivimos rodeados de utensilios que funcionan en base a la Física Cuántica. Por tanto parece sensato que su conocimiento forme parte de la cultura general de cualquier ingeniero, aunque lamentablemente la enseñanza de esta disciplina haya sido descuidada en algunas escuelas superiores.

En este capítulo sentaremos las bases de la teoría y en el capítulo siguiente estudiaremos algunas aplicaciones importantes.

12.2 Los fundamentos

Para entender la Física Cuántica conviene olvidarse casi por completo de la imagen que la Física Clásica nos brinda del mundo que nos rodea. Es una forma radicalmente distinta de hacer Física. Es preferible partir casi de cero: dejar provisionalmente a un lado las ecuaciones de Maxwell, la ley de fuerza de Lorentz y la segunda ley de Newton; borrón y cuenta nueva. Vamos allá.

Clásicamente, cuando decimos que estamos estudiando un sistema físico entendemos que lo que estamos estudiando es un conjunto de partículas y los campos electromagnético y gravitatorio que existen “entre ellas”. Aunque esta definición de sistema físico se ve modificada cuando uno profundiza dentro de la Física Cuántica, en primera aproximación podemos mantenerla, o sea, que un sistema físico será para nosotros, principiantes en esto de la Física Cuántica, lo mismo.

La diferencia fundamental entre la Física Clásica y la Física Cuántica está en lo que se entiende por el *estado* de dicho sistema. Clásicamente, si queremos indicar en qué estado se encuentra el sistema en cierto instante hemos de especificar cuatro cosas:

- La posición de cada una de las partículas que forma el sistema.
- La velocidad de cada una de las partículas que forma el sistema.
- El valor del campo eléctrico, magnético y gravitatorio en todos los puntos del espacio.

- El valor de la derivada respecto al tiempo del campo eléctrico y magnético en todos los puntos del espacio (algo así como su velocidad, análogamente a lo que ocurre con las partículas).

Dadas estas cantidades en cierto instante podemos poner en marcha el conjunto de ecuaciones (12.1) a (12.8) y así predecir el estado del sistema en cualquier instante posterior y con ello el resultado de cualquier medida que realicemos sobre el sistema, por ejemplo la posición de cierta partícula, la energía cinética de otra, la cantidad de movimiento de su centro de masas, etc.

Postulado 1: La descripción del estado cuántico

El estado de un sistema cuántico S está representado por la función de onda.

La función de onda es una función compleja de la posición, \vec{r} , y del tiempo t . En ella está contenida toda la información del sistema en cierto instante de tiempo. ¿Qué es la función de onda del sistema? No es nada que se “palpe” directamente, algo a lo que nuestros sentidos pudieran tener un acceso directo como en el caso de la velocidad o la fuerza, por poner un par de ejemplos. Para comprender el significado de la función de onda conviene pensar en el sistema más simple que se nos pueda ocurrir: una única partícula, o más simple aún, una única partícula que sólo se pueda mover en una dimensión (eje OX). Claro, que una única partícula sin más, no sumergida en ningún campo es algo quizá demasiado simple. Supondremos que la partícula está dentro de un campo consecuencia del cual la partícula está sometida a una fuerza conservativa. Obviamente el origen de este campo se encuentra en la existencia de otras partículas, pero para simplificar nos olvidaremos de este hecho. También es cierto que el movimiento de la partícula modificará el valor del campo que la está bañando, pero también para simplificar supondremos que la influencia de la partícula sobre el campo es despreciable. En realidad estamos haciendo las mismas hipótesis que se hacen cuando se estudia un problema de Mecánica Clásica de una partícula, algo de lo que seguramente ya os habréis percatado.

Así como en Física Clásica el valor de una magnitud física de la partícula, por ejemplo su posición, su velocidad, su energía cinética, su energía potencial, su energía mecánica, etc... podían tomar en principio cualquier valor, en Física Cuántica la partícula sólo tiene permitidos unos valores concretos de estas cantidades. ¿Cuáles? Depende de la fuerza a la que esté sometida. Podríamos ahora intentar comprender esto con un ejemplo, o sea, suponer que nuestra partícula está sometida a una fuerza concreta “sencillita” que derive de una energía potencial, por ejemplo la fuerza que le ejercería un muelle, e intentar averiguar qué valores posibles de la energía mecánica podría tener la partícula. Nos encontraríamos con que los únicos valores posibles son, por ejemplo, 0.5 julios, 1.5 julios, 2.5 julios, etc, (estos números dependerán de la masa de la partícula y la constante del muelle), pero que nunca puede tener 1 julio de energía. Esto es algo inaudito dentro de la Física Clásica ya que, clásicamente, si quisiéramos que la partícula tuviera por ejemplo 1 julio de energía, bastaría con darle unas condiciones iniciales adecuadas y siempre sería posi-

ble. Sin embargo dejaremos este ejemplo para más adelante y nos centraremos ahora en cuestiones más importantes de índole general, aunque forzosamente el lenguaje se volverá algo abstracto. Intentemos “comprender” (al menos matemáticamente) de esta forma general porqué sólo son posibles algunos valores concretos para las magnitudes físicas.

Las magnitudes citadas anteriormente (posición, velocidad, energía cinética, su energía potencial, etc.) clásicamente se llaman variables dinámicas. Una variable dinámica es cualquier función de la posición x y de la cantidad de movimiento p_x de la partícula. Por ejemplo, la energía cinética es $\frac{1}{2}mv_x^2$, pero teniendo en cuenta que $p_x = mv_x$, la energía cinética de la partícula también puede escribirse como $p_x^2/(2m)$. La energía potencial es, por definición, únicamente función de la posición de la partícula, $E_p = E_p(x)$, y así con todas las variables dinámicas. En general podemos decir que si A es una variable dinámica entonces $A = A(x, p_x)$ (en el caso monodimensional que nos ocupa). Obviamente, las variables dinámicas más simples son x y p_x . Todas las demás se construyen a partir de ellas.

Postulado 2: La descripción de las magnitudes físicas

A cada magnitud física asociada al sistema le corresponde un operador.

En Física Cuántica cada una de estas cantidades viene representada matemáticamente por un *operador* que actúa sobre una función de x y t . Un operador es un objeto que actúa sobre otro objeto matemático (una función, por ejemplo) y lo transforma en un objeto distinto (una función distinta). Por ejemplo, el signo “ $-$ ” es un operador, pues actuando por ejemplo sobre la función $\cos x$ la transforma en la función $-\cos x$. Los operadores los denotaremos con un acento circunflejo: \hat{A} ; en este caso diremos que

$$\hat{A}f(x) = g(x), \quad (12.9)$$

siendo $\hat{A} = -$, $f(x) = \cos x$ y $g(x) = -\cos x$.

El operador que representa a la componente x de la posición de la partícula (llamaremos a este operador \hat{x}) consiste en multiplicar la función sobre la que está actuando por la variable x :

$$\hat{x}f(x) = g(x) = xf(x). \quad (12.10)$$

Por ejemplo, si $f(x) = \sin x + \cos t$, entonces $g(x) = x \sin x + x \cos t$. **El operador que representa a la componente x de la cantidad de movimiento (p_x) lo denotaremos por \hat{p}_x y consiste en derivar la función sobre la que está actuando respecto a x y el resultado multiplicarlo por la constante $-i\hbar$, siendo i la unidad imaginaria y \hbar lo que se llama la constante de Planck ($\hbar \approx 6 \cdot 10^{-34}$ Julio \cdot segundo) dividida por 2π ($\hbar = h/(2\pi)$):**

$$\hat{p}_x f(x) = g(x) = -i\hbar \frac{\partial f(x)}{\partial x}. \quad (12.11)$$

Por ejemplo, si $f(x) = \sin x + \cos t$, entonces $g(x) = -i\hbar \cos x$. La suma de dos variables dinámicas viene representada por la correspondiente suma de los operadores. El producto de dos variables dinámicas se representa por el producto de los operadores. Consecuencia de ello, una potencia de una cantidad, por ejemplo p_x^2 , se representa por la acción consecutiva del operador correspondiente sobre la función. Así

$$\hat{p}_x^2 f(x) = \hat{p}_x \hat{p}_x f(x) = (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})f(x) = -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x)}{\partial x} = -\hbar^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}. \quad (12.12)$$

Con las definiciones anteriores es inmediato comprobar que el operador que representa a la energía cinética de una partícula de masa m es (hágase como ejercicio):

$$\hat{E}_c = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (12.13)$$

y a la energía potencial, en el caso en que la partícula esté sujeta por ejemplo a la acción de un muelle de longitud natural nula y constante k , es

$$\hat{E}_p = \frac{1}{2} k \hat{x}^2. \quad (12.14)$$

La acción de este operador sobre la función $f(x, t) = \sin x + \cos t$ haría que ésta se transformase en la función $g(x, t) = \frac{1}{2} k x^2 \sin x + \frac{1}{2} k x^2 \cos t$.

Volvamos ahora a la cuestión que teníamos entre manos, o sea, cómo se determinan los posibles valores de las distintas variables dinámicas. Para ello hay que resolver lo que se llama una ecuación de autovalores, que es una ecuación en la que aparece un parámetro (un número real) y que sólo tiene solución para ciertos valores de este parámetro. Una ecuación de autovalores tiene la forma

$$\hat{A}f(x) = af(x). \quad (12.15)$$

Aquí \hat{A} es un dato, un operador conocido del estilo de los que acabamos de mencionar, $f(x)$ es la incógnita de la ecuación (se llama **autofunción**) y a es el parámetro de la ecuación, un número real, que en cierto modo también es una incógnita; en otras palabras, en general la ecuación anterior sólo tendrá solución para ciertos valores de a . La ecuación (12.15) nos plantea el problema de encontrar aquellas funciones $f(x)$ tales que al hacer actuar el operador \hat{A} sobre cualquiera de ellas nos dé ella misma multiplicada por una constante. Esta constante (a en la ecuación (12.15)) se denomina **autovalor** asociado a la autofunción $f(x)$. Para cada valor posible de a la ecuación anterior tendrá una solución distinta, una autofunción. Para cada autovalor existe una autofunción. Pues bien, y esto es lo importante, **los posibles valores que puede tomar una variable dinámica (una magnitud física) son los autovalores del operador que representa a dicha variable en cada problema concreto.**

Postulado 3: Los resultados de las medidas

Cuando se mide una magnitud física de un sistema cuántico, los únicos valores que se pueden obtener son los valores propios del operador correspondiente a dicha magnitud.

Supongamos que el operador \hat{E} representa a la energía mecánica de la partícula. \hat{E} será una función de los operadores \hat{x} y \hat{p}_x . Por ejemplo, para una partícula sometida a la acción de un muelle \hat{E} será:

$$\hat{E} = \hat{E}_c + \hat{E}_p = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}k\hat{x}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2. \quad (12.16)$$

La acción de este operador sobre la función $\sin x + t$ será

$$\begin{aligned} \hat{E}(\sin x + t) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2 \right) (\sin x + t) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2(\sin x + t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2 \sin x + \frac{1}{2}kx^2 t = \frac{\hbar^2}{2m} \sin x + \frac{1}{2}kx^2 \sin x + \frac{1}{2}kx^2 t. \end{aligned} \quad (12.17)$$

Planteemos la ecuación de autovalores para este operador:

$$\hat{E}f(x) = Ef(x). \quad (12.18)$$

Hemos de encontrar el conjunto de funciones $f(x)$ tales que al aplicarles el operador (12.16) dé ella misma, $f(x)$, pero multiplicada por una constante que estamos llamando E . Los posibles valores de la constante E para los que la ecuación anterior tiene solución son los posibles valores de la energía de la partícula. En otras palabras, los posibles valores de la energía de la partícula son los autovalores de esta ecuación. Cuando realicemos una medida de la energía de la partícula siempre encontraremos que esta es uno de los posibles valores de la constante E . Supongamos que son sólo cuatro los autovalores de (12.16) y llamémoslos E_1 , E_2 , E_3 y E_4 . Para cada uno de estos autovalores habrá una autofunción solución de (12.18). Llamemos a estas autofunciones $f_1^E(x)$, $f_2^E(x)$, $f_3^E(x)$ y $f_4^E(x)$. El subíndice indica el autovalor asociado a cada autofunción; el superíndice es para recordar que estas son las autofunciones del operador energía de la partícula. Es relativamente sencillo encontrar la forma concreta de las autofunciones $f_i^E(x)$ y los autovalores E_i ($i = 1, 2, 3, 4$), pero siguiendo la postura de no desviarnos del problema principal, ni los calcularemos ni los mostraré por el momento. Pensemos ahora en algunos operadores más, por ejemplo el operador posición (\hat{x}) y el operador cantidad de movimiento (\hat{p}_x). Sus ecuaciones de autovalores serán:

$$\hat{x}f(x) = \alpha f(x), \quad (12.19)$$

$$\hat{p}_x f(x) = p_x f(x). \quad (12.20)$$

siendo los posibles autovalores de \hat{x} por ejemplo $\alpha = x_1, x_2, x_3$ y x_4 , y sus autofunciones $f_1^x(x)$, $f_2^x(x)$, $f_3^x(x)$ y $f_4^x(x)$; y los posibles autovalores de \hat{p}_x por ejemplo p_{x1} , p_{x2} , p_{x3} y p_{x4} , y sus autofunciones $f_1^{p_x}(x)$, $f_2^{p_x}(x)$, $f_3^{p_x}(x)$ y $f_4^{p_x}(x)$. Al igual que ocurría con la energía, cuando realicemos una medida de la posición de la partícula la Física Cuántica nos dice que sólo encontraremos uno de los valores x_i . De la misma forma, cuando realicemos una medida de la cantidad de movimiento de la partícula sólo encontraremos uno de los valores p_{xi} . Además, **si al medir hemos obtenido que la posición de la partícula es x_2 entonces, inmediatamente después de la medida, el estado de la partícula queda representado por la función $f_2^x(x)$** . Digámoslo otra vez: $f_2^x(x)$ es la función de onda de la partícula tras haber medido la posición de la partícula y haber obtenido que su valor es x_2 . De forma análoga, si lo que hubiésemos medido fuese la energía mecánica de la partícula y hubiésemos encontrado que esta es E_3 entonces la función de onda que describe el estado de la partícula inmediatamente después de la medida de su energía mecánica sería $f_3^E(x)$.

Generalizando, tenemos:

Postulado 4: La medida. El colapso de la función de onda

Si sobre un sistema cuántico se mide una magnitud física, la función de onda inmediatamente después de la medida es la autofunción correspondiente al autovalor que se ha obtenido en la medida.

12.3 Espacios vectoriales

Supongo que a estas alturas estaréis bastante familiarizados con el concepto de espacio vectorial: las combinaciones lineales de vectores, las bases de estos espacios vectoriales, los cambios de base, la noción de dependencia e independencia lineal, la noción de producto escalar, etc... Incluso puede ser que ya hayáis visto el concepto de autovalor y autovector. Pues bien, todo eso, que es bastante sencillito, se aplica y se ajusta perfectamente a las ideas fundamentales de la Física Cuántica. Es más, es su base principal. Esto es así porque las funciones de onda en realidad no son más que vectores de un espacio vectorial que recibe un nombre especial, el de espacio de Hilbert. El conjunto de autofunciones de un operador constituye una base de este espacio vectorial: siempre es posible escribir la función de onda de una partícula como una combinación lineal de las autofunciones de cualquier operador de la partícula. Por ejemplo, supongamos que hemos realizado una medida de la cantidad de movimiento de la partícula y hemos encontrado que su valor es p_{x2} . Entonces automáticamente su función de onda pasa de ser la que fuera antes de la medida, que no nos importa, a ser $f_2^{p_x}(x)$. Lo que estamos diciendo es que esta función de onda siempre se podrá escribir como una combinación lineal de las autofunciones de, por ejemplo, operador energía, o sea:

$$f_2^{p_x}(x) = af_1^E(x) + bf_2^E(x) + cf_3^E(x) + df_4^E(x) = \sum_{i=1}^4 c_i f_i^E(x); \quad (12.21)$$

o del operador posición

$$f_2^{p_x}(x) = a'f_1^x(x) + b'f_2^x(x) + c'f_3^x(x) + d'f_4^x(x) = \sum_{i=1}^4 c'_i f_i^x(x). \quad (12.22)$$

En (12.22) hemos puesto “*primas*” porque, obviamente, los coeficientes que aparecen en estas dos combinaciones lineales, $(a', b', c', d') \equiv (c'_1, c'_2, c'_3, c'_4)$ y $(a, b, c, d) \equiv (c_1, c_2, c_3, c_4)$, son distintos. En realidad, estos coeficientes no son más que las componentes del vector $f_2^{p_x}(x)$ en dos bases distintas: la base formada por las autofunciones del operador \hat{E} y la base formada por las autofunciones del operador \hat{x} . Estos coeficientes, (a', b', c', d') y (a, b, c, d) , son números complejos, esto es, en general pueden tener una parte real y otra imaginaria. Su significado es muy importante, y lo veremos con el siguiente ejemplo: supongamos que hemos medido la cantidad de movimiento de la partícula y hemos encontrado que su valor es p_{x2} . Esto significa que ahora la función de onda que describe el estado de la partícula es $f_2^{p_x}(x)$. Supongamos que ahora decidimos realizar una medida de la energía de la partícula; ¿qué valor obtendremos? Pues para saberlo lo que hacemos es escribir $f_2^{p_x}(x)$ como una combinación lineal de las autofunciones del operador energía, tal como está en (12.21). La probabilidad de que al medir la energía de la partícula esta valga E_1 será $aa^* \equiv |a|^2 = |c_1|^2$, o sea, el módulo al cuadrado del coeficiente que acompaña a $f_1^E(x)$. La probabilidad de que al medir la energía de la partícula esta sea E_2 será $|b|^2 = |c_2|^2$, y así sucesivamente. Si en vez de realizar una medida de la energía decidimos realizar una medida de la posición, entonces lo que tendríamos que haber hecho habría sido escribir $f_2^{p_x}(x)$ utilizando como base las autofunciones del operador posición, tal como está en (12.22). Así, tras medir la cantidad de movimiento y encontrar que su valor es p_{x2} , la probabilidad de que al medir la posición de la partícula la encontremos en x_1 será $|a'|^2 = |c'_1|^2$, la probabilidad de encontrarla en x_2 será $|b'|^2 = |c'_2|^2$ y así sucesivamente.

Postulado 5: La probabilidad de que al medir la magnitud física A cuando la partícula se encuentra en el estado definido por la función de onda $f(x)$ sea el autovalor a_i de \hat{A} viene dada por¹

$$Prob[A = a_i] = |\beta_i|^2, \quad (12.23)$$

donde β_i es el coeficiente que multiplica a $f_i^A(x)$ en el desarrollo de $f(x)$ en la base de autofunciones de A . Es decir

$$f(x) = \sum_i \beta_i f_i^A(x). \quad (12.24)$$

¹La expresión general del Postulado 5 se dará más adelante, a través de la ecuación (12.33).

Si hemos encontrado que la partícula está en x_1 entonces la función de onda pasa de ser $f_2^{p_x}(x)$ a ser $f_1^x(x)$, o si lo que hemos encontrado ha sido que la partícula está en x_2 la función de onda pasa a ser $f_2^x(x)$. Este cambio brusco, este salto, de la función de onda cuando realizamos una medida sobre el sistema se llama **colapso** o **reducción** de la función de onda. **Quizá lo más destacable de todo esto es que la Física Cuántica sólo nos permita predecir probabilidades, contrariamente a la Física Clásica, que permite predecir el valor exacto de la variable que estamos midiendo.**

12.4 Lo que pasa entre medida y medida

Ya hemos visto qué le pasa a la función de onda cuando se realiza la medida de un observable sobre el sistema: salta (colapsa). ¿Qué le pasa a la función de onda entre medida y medida? Entre dos medidas la función de onda evoluciona, cambia, pero no a saltos como ocurre cuando se realiza una medida, sino de forma suave y continua. La evolución que sufre una función de onda en el lapso de tiempo entre dos medidas viene dada por una ecuación fundamental de la Física: la ecuación de Schrödinger. En lugar de escribir esta ecuación, vamos a expresar su solución cuando se trabaja en la base de las autofunciones de la energía.

Escribimos la función de onda en el instante inicial $t = 0$ (tras una medida, por ejemplo de la cantidad de movimiento, con resultado p_{x2}) en la base vectorial formada por las autofunciones de la energía, como hicimos en (12.21):

$$f(x, t = 0) = f_2^{p_x}(x) = af_1^E(x) + bf_2^E(x) + cf_3^E(x) + df_4^E(x) = \sum_n c_n f_n^E(x). \quad (12.25)$$

Si queremos saber el valor de la función de onda en el instante $t = t'$ (siempre que entre $t = 0$ y $t = t'$ no hayamos realizado ninguna medida) lo único que tenemos que hacer es multiplicar el término n -simo por una exponencial imaginaria de la forma $\exp[-iE_n t/\hbar]$. Es decir:

$$\begin{aligned} f(x, t = t') &= ae^{-iE_1 t'/\hbar} f_1^E(x) + be^{-iE_2 t'/\hbar} f_2^E(x) + ce^{-iE_3 t'/\hbar} f_3^E(x) + de^{-iE_4 t'/\hbar} f_4^E(x) = \\ &= \sum_n c_n e^{-iE_n t'/\hbar} f_n^E(x). \end{aligned} \quad (12.26)$$

Resumiendo, tenemos:

Postulado 6: La evolución cuando no hay medidas

La evolución temporal del vector de estado del sistema cuando no se producen medidas está dada por la ecuación de Schrödinger.

Si el estado inicial se expresa en la base de la energía, entonces, la resolución de esta ecuación da lugar a:

$$f(x, t = 0) = \sum_n c_n f_n^E(x) \rightarrow f(x, t = t') = \sum_n c_n e^{\frac{-iE_n t'}{\hbar}} f_n^E(x), \quad (12.27)$$

donde $\hat{E}f_n^E(x) = E_n f_n^E(x)$.

Si ahora quisiéramos saber cuál es la probabilidad de que al hacer una medida de una variable dinámica la partícula tuviese un valor concreto de esta variable, lo haríamos como antes, o sea, escribiendo la función $f(x, t = t')$ en la base correspondiente a dicha variable. Por ejemplo, si dicha variable fuera la propia energía de la partícula, usaríamos directamente la expresión (12.26). Casualmente, las probabilidades para la energía no cambian con el tiempo. Así, por ejemplo, la probabilidad de encontrar la energía E_1 en $t = t'$ es

$$|ae^{-iE_1 t'/\hbar}|^2 = ae^{-iE_1 t'/\hbar} a^* e^{iE_1 t'/\hbar} = aa^* = |a|^2, \quad (12.28)$$

o sea, la misma que en $t = 0$.

12.5 Ortogonalidad y ortonormalidad

Hemos dicho que la función de onda de una partícula se puede escribir como una combinación lineal de las autofunciones de cualquier operador asociado a dicha partícula. Estas combinaciones lineales tendrán unos coeficientes u otros dependiendo del operador cuyas autofunciones estemos usando. Las funciones de onda de una partícula tienen estructura de espacio vectorial. En este espacio vectorial se puede definir un producto escalar. En el caso de las funciones de onda, el producto escalar de dos de ellas, $f_1(x)$ y $f_2(x)$, se define así:

$$f_1(x) \odot f_2(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(x) f_2(x) dx. \quad (12.29)$$

Nótese que el punto \odot entre las dos funciones lo que denota es el producto escalar de ellas, no la multiplicación ordinaria, para la que no ponemos punto como es habitual.

Se define la **norma** $\|f(x)\|$ de una función de onda $f(x)$ como

$$\|f(x)\| \equiv \sqrt{f(x) \odot f(x)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) f(x) dx}. \quad (12.30)$$

Cuando uno resuelve la ecuación de autovalores de un operador para encontrar sus autofunciones, puede ocurrir que las autofunciones que obtengamos no estén normalizadas, esto es, que la norma de alguna de ellas no sea la unidad. Entonces lo

que hemos de hacer es normalizarlas, o sea, dividir las por su norma. De esta forma seguirán siendo solución de la ecuación de autovalores y además su norma será la unidad.

Una propiedad muy importante (que no demostraremos) es que **las autofunciones de un operador son siempre ortonormales**. Si cogemos dos de ellas asociadas a dos autovalores distintos entonces su producto escalar vale cero (ortogonalidad). Si hacemos el producto escalar de una de ellas consigo misma vale uno (normalidad). Esto se suele expresar de forma compacta de la siguiente manera (tomando como ejemplo un par de autofunciones de la energía):

$$f_i^E(x) \odot f_j^E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i^{E*}(x) f_j^E(x) dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (12.31)$$

El que las autofunciones de un operador sean ortonormales nos permite calcular cuál es la probabilidad de obtener cierto resultado al realizar la medida de una magnitud física sin necesidad de tener que escribir la función de onda de la partícula en la base de autofunciones asociada a dicho operador, cosa que puede resultar algo difícil en la práctica. Es muy fácil de ver que el coeficiente correspondiente, cuyo módulo al cuadrado da dicha probabilidad, es simplemente *el producto escalar de la autofunción correspondiente² multiplicada por la función de onda en la que se encuentre la partícula*. Dicho de esta forma quizá no se entienda muy bien, pero el siguiente ejemplo permitirá comprenderlo mejor.

Supongamos que la función de onda de la partícula es $f_2^{p_x}(x)$. Si ahora queremos calcular cuál es la probabilidad de que al realizar una medida de la energía se obtenga E_3 , en principio lo que tendríamos que hacer es escribir $f_2^{p_x}(x)$ como suma de las autofunciones de la energía, en la forma que está en (12.21), y observar cuánto vale c . Pero hay un camino más fácil: multiplicar escalarmente $f_3^E(x)$ por $f_2^{p_x}(x)$. Ello da directamente c . Veámoslo (este ejemplo sirve como demostración si pensamos en un par de funciones genéricas):

$$\begin{aligned} f_3^E(x) \odot f_2^{p_x}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_3^{*E}(x) f_2^{p_x}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_3^{*E}(x) \left(a f_1^E(x) + b f_2^E(x) + c f_3^E(x) + d f_4^E(x) \right) dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} f_3^{*E}(x) f_1^E(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f_3^{*E}(x) f_2^E(x) dx \\ &\quad + c \int_{-\infty}^{\infty} f_3^{*E}(x) f_3^E(x) dx + d \int_{-\infty}^{\infty} f_3^{*E}(x) f_4^E(x) dx \\ &= a0 + b0 + c1 + d0 = c. \end{aligned} \quad (12.32)$$

Por tanto, podemos generalizar el postulado 5 (12.23) del siguiente modo:

²O sea, la autofunción correspondiente al autovalor en cuya probabilidad estamos interesados.

Postulado 5: Probabilidades de los resultados

La probabilidad de obtener el valor propio a_i de la magnitud A es igual al cuadrado del módulo del producto escalar de la función propia correspondiente a dicho autovalor, por la función de onda que representa al estado del sistema. Es decir:

$$\text{Prob}[A = a_i] = |f_i^A(x) \odot f(x)|^2, \quad (12.33)$$

siendo $f(x)$ la función de onda que define el estado de la partícula antes de hacer la medida.

12.6 Valor medio de una variable dinámica

Supongamos que tenemos un número muy elevado de partículas, todas con la misma función de onda. O sea, tenemos muchos sistemas físicos, todos en el mismo estado, descrito por ejemplo por la función de onda $f_2^{p_x}(x)$. Supongamos que cuando expresamos $f_2^{p_x}(x)$ en la base de las autofunciones de la energía encontramos que

$$f_2^{p_x}(x) = \sum_{i=1}^4 c_i f_i^E(x). \quad (12.34)$$

Aquí el conjunto de coeficientes (c_1, c_2, c_3, c_4) (componentes de $f_2^{p_x}(x)$ en la base de las autofunciones $f_i^E(x)$, con $i = 1, 2, 3, 4$) es lo que antes habíamos denotado por (a, b, c, d) . Utilizamos esta notación para simplificar la escritura.

Supongamos también que sobre una de estas partículas realizamos una medida de la energía. La probabilidad de obtener E_i será $|c_i|^2$ (con $i = 1, 2, 3, 4$). Supongamos que también decidimos medir la energía sobre otra de estas partículas; igualmente la probabilidad de obtener E_i será $|c_i|^2$ (con $i = 1, 2, 3, 4$). Y así con todas las partículas de que dispongo. Si tengo muchas partículas entonces el valor medio de la energía de todo el conjunto será simplemente

$$\langle E \rangle = \sum_{i=1}^4 |c_i|^2 E_i. \quad (12.35)$$

Sin embargo, a la hora de calcular el valor medio de cierta variable dinámica no hace falta recurrir a expresiones de la forma (12.35), que por otra parte son bastante engorrosas pues requieren expresar la función del onda del sistema (en ese caso $f_2^{p_x}$) en la base del operador correspondiente (en este caso \hat{E}). Todo esto se puede evitar si nos percatamos de que el valor medio de una variable dinámica A representada por el operador \hat{A} , cuando la función de onda de la partícula es $f(x)$, viene dado por:

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \hat{A} f(x) dx. \quad (12.36)$$

La demostración de esto quizá se comprenda mejor con un ejemplo concreto, como hicimos en (12.32). Supongamos que la función de onda de la partícula es $f_2^{p_x}$ y que queremos calcular cuál es el valor medio de la energía. Entonces:

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f_2^{p_x*}(x) \hat{E} f_2^{p_x}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sum_{i=1}^4 c_i^* f_i^{E*}(x) \right) \hat{E} \left(\sum_{j=1}^4 c_j f_j^E(x) \right) \\
&= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_i^* c_j \int_{-\infty}^{\infty} dx f_i^{E*}(x) \hat{E} f_j^E(x) \\
&= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_i^* c_j \int_{-\infty}^{\infty} dx f_i^{E*}(x) E_j f_j^E(x) \\
&= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_i^* c_j E_j \int_{-\infty}^{\infty} dx f_i^{E*}(x) f_j^E(x) \\
&= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_i^* c_j E_j \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^4 |c_i|^2 E_i, \tag{12.37}
\end{aligned}$$

que es precisamente la expresión del valor medio de la energía, según se vio en (12.35).

12.7 El operador posición es bastante peculiar

Si nos fijamos en la ecuación (12.19) nos daremos cuenta que el operador posición es bastante peculiar. El mismo símbolo que aparece como variable dentro de la autofunción, la x , es también el correspondiente autovalor. Esto le confiere a la posición un papel especial dentro de la teoría. Resulta que al resolver la ecuación de autovalores y autovectores del operador de posición no se obtiene un conjunto discreto, sino continuo. Es decir, en el caso de los autovalores no obtenemos los números x_1, x_2, x_3, \dots , sino que se obtiene que α puede ser cualquier número real³. Esta circunstancia hace que alguna de las cosas que se han dicho hasta ahora para un operador cualquiera haya que modificarlas. Por ejemplo, en la base vectorial de las autofunciones de \hat{x} una función de onda cualquiera, en vez de expresarse como una combinación lineal en un índice discreto (sumatorio como el (12.22)), se tendría

³Al conjunto de los autovalores de un operador se le denomina espectro del mismo. Hasta ahora habíamos supuesto implícitamente que nuestros operadores tenían un espectro discreto. El operador posición es el primer caso que vemos de operador con espectro continuo.

una integral en el índice continuo. Así, si la autofunción de \hat{x} correspondiente al autovalor α la denominamos $f_\alpha^x(x)$, la expresión análoga a (12.22) sería

$$f_2^{p_x}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\alpha) f_\alpha^x(x) d\alpha. \quad (12.38)$$

Es decir, la suma en el índice discreto i se convierte en la integral en el índice continuo α . La receta (12.23) para el cálculo de probabilidades de los resultados de la medida de una magnitud física también se ve modificada cuando el operador asociado a la magnitud tiene un espectro continuo, pues en este caso la ecuación (12.24) ya no es válida, debiendo usarse en su lugar una del tipo de la (12.38)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(\alpha) f_\alpha^A(x) d\alpha. \quad (12.39)$$

Si ahora comparamos (12.39) con (12.24), vemos que el análogo a la β_i de (12.24) es $\beta(\alpha)d\alpha$. Por tanto, en lugar de (12.23) ahora tendremos

$$Prob[A = \alpha] \rightarrow 0. \quad (12.40)$$

En realidad, al aproximar la integral (12.39) al sumatorio (12.24), lo que hemos hecho es “dividir” el eje de las α en “intervalitos” de ancho $d\alpha$, y (12.40) lo que nos da es la probabilidad de que al medir A obtengamos un valor perteneciente al intervalito $[\alpha, \alpha + d\alpha]$. Para obtener una probabilidad finita debemos hacer finito el intervalito. Es decir, la probabilidad de que al medir A obtengamos un valor perteneciente al intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$ será la “suma” de las probabilidades de que el resultado pertenezca al intervalo $[\alpha_1, \alpha_1 + d\alpha]$, ó al intervalo $[\alpha_1 + d\alpha, \alpha_1 + 2d\alpha]$, ó al $[\alpha_1 + 2d\alpha, \alpha_1 + 3d\alpha]$, ó En definitiva:

$$Prob[A = \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]] = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} |\beta(\alpha)|^2 d\alpha. \quad (12.41)$$

Capítulo 13

APLICACIONES ACADÉMICAS

La primera sección de este capítulo la dedicaremos a estudiar algunas cuestiones de Física Clásica que nos serán muy útiles en nuestro estudio de Física Cuántica. En la segunda sección aplicaremos los conocimientos que hemos adquirido en el capítulo anterior a varios casos concretos. Finalmente, estudiaremos cosas tan importantes como el principio de incertidumbre de Heisenberg o el efecto túnel.

13.1 Relación entre la fuerza y la energía

Vamos a volver por un momento la vista hacia la Física Clásica. Vimos a comienzos de curso cómo conocidas las fuerzas que actúan sobre una partícula podemos predecir su movimiento. Lo único que había que hacer era resolver una ecuación diferencial llamada Segunda Ley de Newton, imponiendo a la solución general que sale de ella las condiciones iniciales particulares de nuestro problema.

También habíamos definido los conceptos de energía cinética, potencial y mecánica (suma de las dos anteriores). Definimos la energía potencial como una función de la posición x tal que su diferencial cambiada de signo daba el trabajo elemental. Es decir:

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}. \quad (13.1)$$

Esta íntima relación entre la fuerza y la energía potencial permite describir el movimiento de una partícula analizando la curva de su energía potencial. Para ello es fundamental tener en cuenta que **si todas las fuerzas que actúan sobre el sistema se pueden derivar de una energía potencial entonces la energía mecánica del sistema (suma de la energía cinética y potencial) se conserva.**

$$E = E_c + E_p = cte. \quad (13.2)$$

En la figura 13.1 he dibujado un ejemplo de curva de energía potencial de una partícula, o sea, el valor de la energía potencial como función de la posición. Pasar

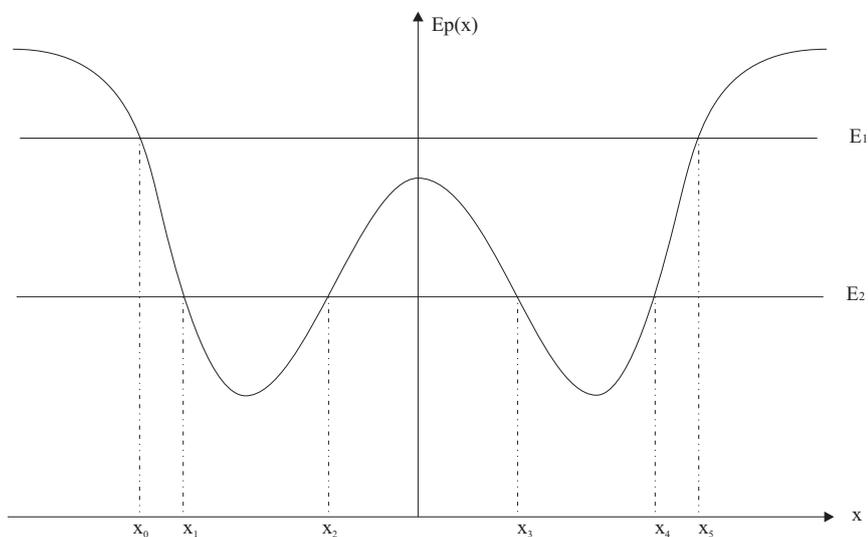


Figura 13.1: Curva de energía potencial.

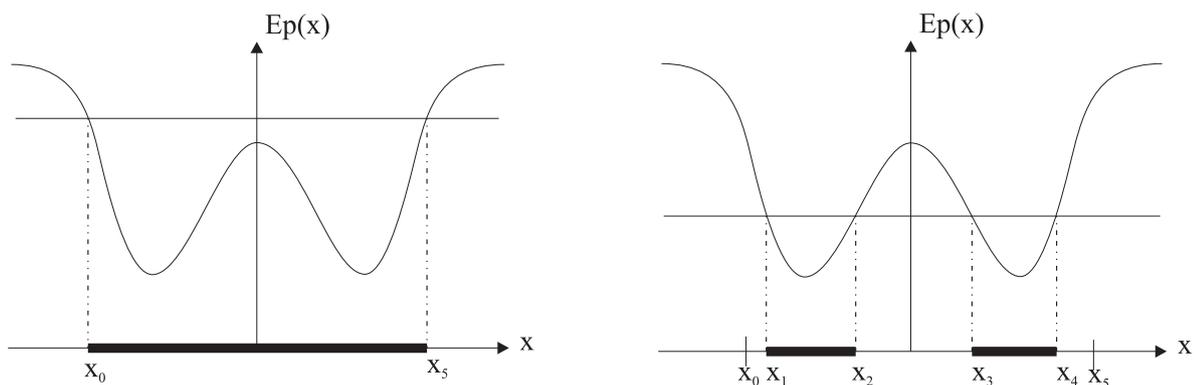


Figura 13.2: Zona permitida y prohibida para el movimiento (clásicamente).

de la curva que representa la energía potencial a la curva que representa la fuerza es trivial; basta con derivar la primera respecto a x . Para pasar de la energía potencial a la fuerza habría que realizar el proceso contrario, o sea, integrar. En este proceso de integración siempre queda una constante por definir, la constante de integración. Es por ello que se dice que la energía potencial queda definida salvo una constante. El valor de esta constante es irrelevante, o sea, el movimiento de la partícula no depende de él, pues, valga lo que valga, la fuerza a la que está sometida la partícula es la misma. También en la figura 13.1 he representado la energía mecánica de la partícula. Es una línea recta horizontal porque si, como decimos, la energía mecánica se conserva, entonces su valor no puede cambiar de un punto al otro del eje x . Este valor constante depende de las condiciones iniciales que tenga la partícula. En la figura se han representado dos valores distintos de las condiciones iniciales, lo que da lugar a dos energías mecánicas distintas, E_1 y E_2 .

Para analizar el movimiento utilizando la curva de energía potencial conviene ver la ecuación (13.2) como

$$E_c = E - E_p(x), \quad (13.3)$$

de forma que E_c será también una función de x . Por otra parte se sabe que $E_c = mv^2/2$, con lo que la energía cinética siempre ha de ser positiva. Por tanto, **aquellos valores de x en los que $E < E_p$** (y que según (13.3) darían una E_c negativa) **son zonas prohibidas** para el movimiento de la partícula. En los puntos en los que $E = E_p$ ocurre (también según (13.3)) que E_c se hace cero. Esto significa que la velocidad se hará cero. En estos puntos cambia el sentido del movimiento. Por ello se llaman puntos de retorno. En la figura 13.2 podemos ver las zonas prohibidas y permitidas para el movimiento de una partícula sujeta a la energía potencial de la figura 13.1 para dos valores distintos de las condiciones iniciales, esto es, para dos valores distintos de la energía mecánica de la partícula, E_1 y E_2 . En el caso en el que la energía mecánica es E_1 el movimiento se realiza entre las zonas x_1 y x_4 . En el caso en el que la energía mecánica es E_2 el movimiento se realiza entre las zonas x_1 y x_2 si inicialmente la partícula se encontraba en este intervalo, o entre las zonas x_3 y x_4 si inicialmente la partícula estaba entre estos dos puntos. En el resto del eje x la partícula nunca se puede encontrar pues ello implicaría tener una energía cinética negativa, según (13.3).

13.2 Ejemplos de autovalores y autofunciones de la energía

Volvamos a la Física Cuántica, que es lo que nos ocupa en estos días. En esta sección mostraré los autovalores y las autofunciones de la energía mecánica de una

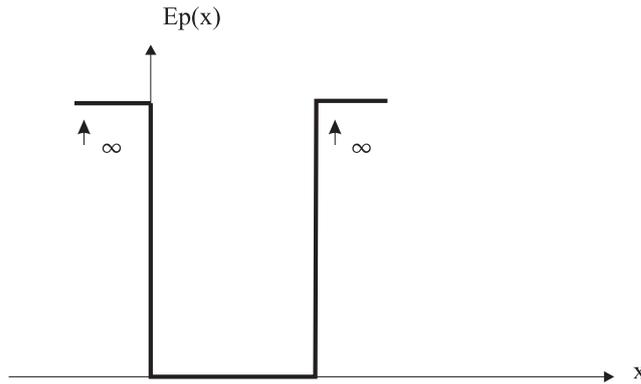


Figura 13.3: Curva de la energía potencial para el pozo infinito de anchura L .

partícula para distintos casos de su energía potencial¹. Para ello hemos de resolver la ecuación:

$$\hat{E}f(x) = Ef(x), \quad (13.4)$$

donde

$$\hat{E}(\hat{x}, \hat{p}) = \hat{E}_c(\hat{x}, \hat{p}) + \hat{E}_p(\hat{x}, \hat{p}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_p(x)\hat{1}, \quad (13.5)$$

ya que

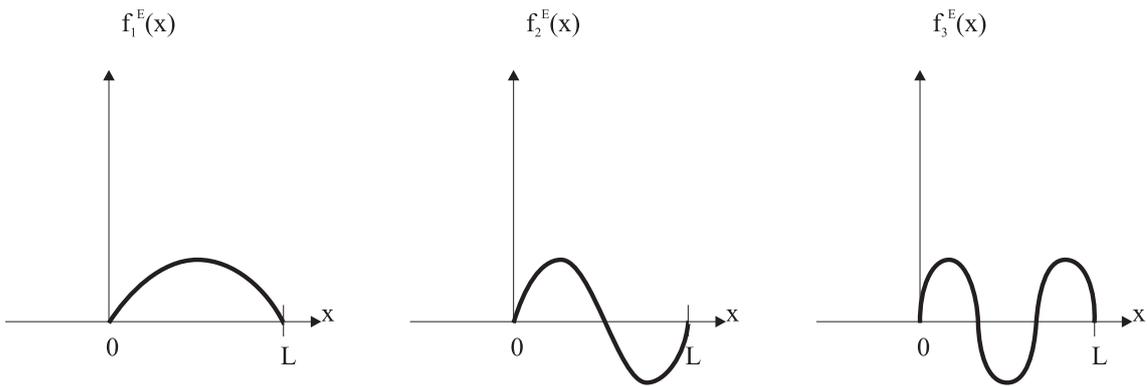
$$\hat{E}_p(\hat{x}, \hat{p}) = E_p(\hat{x}) = E_p(x)\hat{1}, \quad (13.6)$$

pues, como habíamos dicho en el capítulo anterior, $\hat{x} = x\hat{1}$, siendo $\hat{1}$ el operador identidad. Lo que caracteriza a los casos que vamos a estudiar es la función $E_p(x)$ que, como veremos, tiene una forma distinta en cada uno de ellos.

13.2.1 Pozo cuadrado infinito de anchura L

En este caso la partícula está sujeta a una energía potencial con el aspecto que se muestra en la figura 13.3. Clásicamente una partícula sujeta a una energía potencial de este tipo se estaría moviendo libremente entre $x = 0$ y $x = L$ rebotando siempre que llega a uno de estos dos puntos ya que el resto del eje x es impenetrable (prohibido): sea cual sea la energía mecánica de la partícula su energía cinética fuera del intervalo $[0, L]$ sería negativa ya que la energía potencial sería infinita. Cuánticamente, por el contrario, no podemos decir que la partícula se esté moviendo de la forma indicada anteriormente. Sólo tenemos un conjunto de reglas que nos permiten calcular las probabilidades de encontrar cierto valor de una magnitud cuando la medimos.

¹Al final de esta sección explicaré por qué estudio los casos que estudio y no otros, y por qué mostramos las autofunciones y los autovalores del operador energía y no de cualquier otro operador.


 Figura 13.4: Autofunciones del pozo infinito para $n = 1, 2$ y 3 .

Para calcular los autovalores y las autofunciones del operador energía hemos de resolver la ecuación

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + E_p(x)f(x) = Ef(x), \quad (13.7)$$

teniendo en cuenta que

$$E_p(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{si } x > L. \end{cases} \quad (13.8)$$

En (13.7) la incógnita es la función $f(x)$, o sea, las autofunciones del operador energía en este caso. En cierto modo también E es una incógnita, ya que la ecuación (13.7) sólo tiene solución para algunos valores de E , y estos hemos de descubrirlos. (13.7) es una ecuación diferencial. Hallar su solución no es difícil, pero requiere de algunos conocimientos matemáticos que a este nivel no se suelen tener. Por ello nos limitaremos a escribir directamente el resultado; cuáles son las funciones $f(x)$ y cuáles son los valores de E para los que esta ecuación tiene solución. Son los siguientes (los enumeraremos con el subíndice n):

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13.9)$$

$$f_n^E(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ó } x > L \end{cases} \quad (13.10)$$

Lo más importante que se deduce de este ejemplo es la denominada cuantización de la energía: Mientras que clásicamente, en este problema, la energía puede tomar cualquier valor real (fijado por las condiciones iniciales), cuánticamente sólo puede tomar un conjunto discreto de valores (los dados por (13.9)).

En la figura 13.4 se muestran las autofunciones para $n = 1, 2$ y 3 .

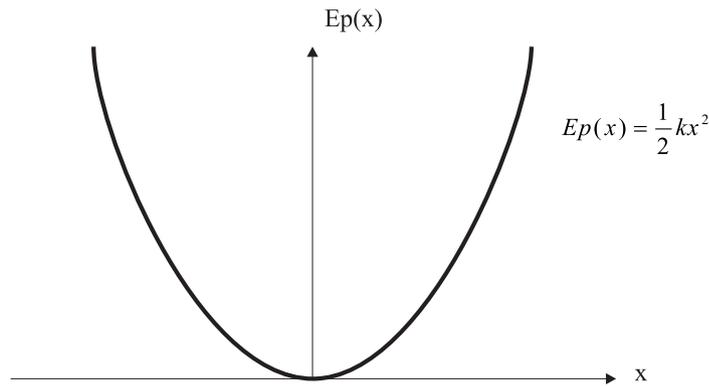


Figura 13.5: Curva de la energía potencial de un oscilador armónico.

13.2.2 Oscilador armónico simple

Supongamos que una partícula de masa m se mueve clásicamente sometida a la fuerza de un muelle de constante k . En la figura 13.5 se representa su energía potencial. Llamaremos, como de costumbre, ω a la cantidad $\sqrt{k/m}$. Tendremos que resolver la ecuación (13.7), pero ahora

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad (13.11)$$

en vez de (13.8).

Los autovalores y las autofunciones en este caso son

$$E_n = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n\right) ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (13.12)$$

$$f_n^E(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{2n-1}{4}} e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\right]. \quad (13.13)$$

En la figura 13.6 se muestran las autofunciones para distintos valores de n . Lo más destacable de todo esto es que si observamos estas autofunciones con cuidado nos daremos cuenta de que se salen un poquito de la zona en la que clásicamente se puede mover la partícula. O sea, tras medir la energía de la partícula **existe cierta probabilidad de encontrar a ésta en la zona prohibida clásicamente** (dado que la probabilidad viene dada por $|f(x)|^2 dx$ y esta cantidad será distinta de cero para algunos valores de x que están en la zona clásicamente prohibida). Estrictamente, como la función de onda no se hace cero nunca, sino que se aproxima asintóticamente a cero para $x \rightarrow \pm\infty$, por lejos que estemos del origen siempre habrá alguna probabilidad de encontrar la partícula. Esto es algo sorprendente, sin parangón dentro de la Física Clásica. Este hecho está íntimamente relacionado con el llamado “efecto túnel”, de múltiples aplicaciones tecnológicas y que discutiremos más adelante.

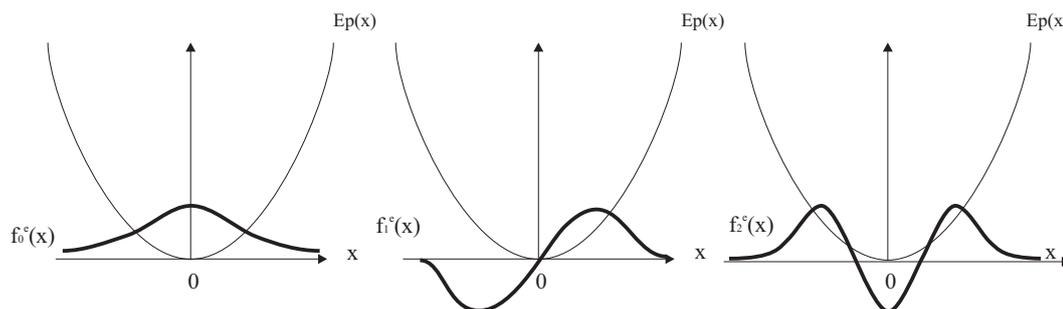


Figura 13.6: Autofunciones del oscilador armónico para $n = 0, 1$ y 2 .

13.3 El principio de incertidumbre

Lo primero que debemos decir del principio de incertidumbre es que no es realmente un principio tal y como se definió la noción de principio en el capítulo 1, o sea, como equivalente a ley, axioma o postulado. Por el contrario, el “principio” de incertidumbre de Heisenberg se puede *deducir* a partir de el conjunto de postulados que se han ido introduciendo a lo largo de estas lecciones de Física Cuántica. Nosotros, sin embargo, no lo deduciremos. Nos conformaremos con enunciarlo², pero antes necesitaremos unos cuantos conceptos:

• Magnitudes compatibles e incompatibles

Supongamos que existen dos magnitudes, A y B , representadas por los operadores \hat{A} (con autovalores a_1, a_2, a_3, \dots , y autofunciones $f_1^A(x), f_2^A(x), f_3^A(x), \dots$) y \hat{B} (con autovalores b_1, b_2, b_3, \dots y autofunciones $f_1^B(x), f_2^B(x), f_3^B(x), \dots$). Vamos a realizar tres medidas consecutivas simultáneas³. La primera y la última de A ; la segunda de B . El resultado de la primera medida será uno de los autovalores de \hat{A} , digamos a_i , y la función de onda, $f(x)$, como consecuencia de la medida, colapsará a la autofunción $f_i^A(x)$. Ahora se mide B , y la función de onda vuelve a colapsar a la autofunción $f_j^B(x)$ de B , correspondiente al autovalor, digamos b_j , que se obtiene en esta segunda medida. Finalmente, supongamos que sea a_k el resultado de la tercera medida. ¿Serán los valores a_i y a_k iguales? En general no, puesto que en la primera medida de A la partícula se encuentra en el estado definido por la función de onda $f(x)$ (que puede ser cualquiera), y en la segunda medida de A (la tercera de las realizadas) la partícula se encuentra en el estado definido por la función de onda $f_j^B(x)$ que, en principio, será distinta de $f(x)$. Sin embargo se dan ocasiones en que $a_i = a_k$ con independencia del estado $f(x)$ de partida. Cuando esto ocurre se dice que las magnitudes A y B son compatibles. Y en el caso general, cuando esto no

²El estudiante interesado puede encontrar la demostración rigurosa del mismo en el libro de D.T. Gillespie recomendado en la bibliografía. Este libro es muy recomendable para todo lo que estamos viendo de Física Cuántica.

³¡Esto es una contradicción! Consecutivas significa una detrás de otra, y simultáneas, a la vez. ¿En qué quedamos? Vamos a hacerlas una detrás de otra, pero sin dejar que pase apenas tiempo entre las mismas. Idealmente, el tiempo transcurrido entre una medida y la siguiente es cero.

ocurre, A y B se dicen incompatibles.

• **Autofunciones comunes**

Cuando los operadores correspondientes a dos magnitudes físicas comparten todas sus autofunciones se dice que tienen una base propia común. Por supuesto, estos operadores no compartirán los autovalores (al menos, no todos), pues si no serían idénticos y no representarían a dos magnitudes físicas distintas.

• **Conmutador de dos operadores**

En general, el estado de una partícula tras la medida consecutiva de dos magnitudes físicas A y B dependerá del orden en que se realicen. Una medida de la relevancia de este efecto la da el conmutador de \hat{A} y \hat{B} , que es un operador definido por:

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (13.14)$$

• **Teorema de compatibilidad**

Este teorema muestra la íntima conexión que existe entre los tres conceptos recién comentados, y sólo lo vamos a enunciar sin demostración. Dice que dadas dos magnitudes A y B representadas por los operadores \hat{A} y \hat{B} , entonces cualquiera de las tres condiciones siguientes implica las otras dos:

- (i) A y B son magnitudes compatibles.
- (ii) \hat{A} y \hat{B} poseen una base común.
- (iii) El conmutador de \hat{A} y \hat{B} , $[\hat{A}, \hat{B}]$, vale cero.

• **Valor medio y dispersión**

Pensemos en cierta magnitud, por ejemplo la velocidad de la partícula v_x . Tendrá asociada cierto operador que llamaremos \hat{v}_x . Denominemos $v_{x1}, v_{x2}, v_{x3}, \dots$ a los autovalores de \hat{v}_x , y $f_1^{v_x}(x), f_2^{v_x}(x), f_3^{v_x}(x), \dots$ a las correspondientes autofunciones. Ahora supongamos que tenemos una gran colección de N partículas, todas ellas en un estado descrito por la misma función de onda $f(x)$. Sabemos que en general, si decidimos medir en todas estas partículas su velocidad v_x , entonces, en principio, obtendremos resultados diferentes. Llamaremos $v_x^{(i)}$ al resultado que se obtiene al realizar la medida sobre la partícula i del conjunto. Cualquiera que sea el valor de i , el valor de $v_x^{(i)}$ debe coincidir con alguno de los autovalores v_{xj} de \hat{v}_x . La probabilidad de que $v_x^{(i)} = v_{xj}$ no depende de i , y viene dada por⁴ $|f_j^{v_x}(x) \odot f(x)|^2$. Ya vimos en el capítulo anterior cómo calcular el valor medio de v_x , que llamaremos $\langle v_x \rangle$.

Ahora vamos a introducir un concepto nuevo, el concepto de dispersión⁵. Se define como

$$\Delta v_x \equiv \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (v_x^{(i)} - \langle v_x \rangle)^2}{N}}. \quad (13.15)$$

⁴Ver (12.32).

⁵También se denomina desviación cuadrática media ó desviación típica.

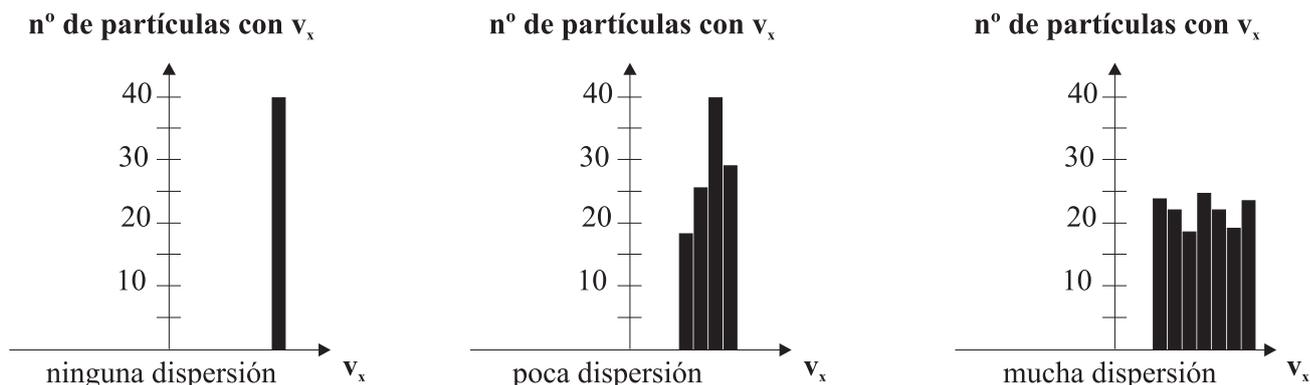


Figura 13.7: Distintos ejemplos de dispersión cuadrática media.

Si nos fijamos en esta definición nos daremos cuenta de que básicamente mide cuánto se desvía de la media $\langle v_x \rangle$ el resultado de cada una de las medidas: $v_x^{(i)} - \langle v_x \rangle$. Al dividir por el número de medidas lo que estamos haciendo es algo así como el valor medio de esta cantidad. Sin embargo, para que las desviaciones por encima de la media (positivas) no puedan cancelarse con las desviaciones por debajo de la media (negativas), lo que se hace es elevar todas ellas al cuadrado; por último, para “corregir” el haber elevado al cuadrado, tomamos la raíz cuadrada.

Se puede demostrar fácilmente que (13.15) también puede escribirse como

$$\Delta v_x = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle - \langle v_x \rangle^2}, \quad (13.16)$$

o sea, que para calcular la dispersión lo único que necesitamos conocer es el valor medio de v_x y el valor medio de v_x^2 .

En la figura 13.7 se muestran los resultados de medir v_x sobre tres conjuntos distintos de partículas. En el primer conjunto todas las partículas tienen la misma v_x , por eso todos los resultados coinciden con el valor medio de estos. En el segundo conjunto hay unas pocas partículas cuya v_x se aparta un poco del valor medio. Entonces la Δv_x para este conjunto es pequeña. Por último, en el tercer conjunto casi ninguna partícula tiene una v_x igual al valor medio de estas medidas. Entonces su Δv_x es grande. En otras palabras, Δv_x es una medida de cuánto de dispersos están los resultados.

• “Principio” (teorema) de incertidumbre de Heisenberg

Ahora estamos en condiciones de enunciarlo. Supongamos que en cierto instante tenemos un conjunto enorme de partículas, todas ellas descritas por la misma función de onda $f(x)$, y que decidimos medir a la vez A sobre un gran número de estas partículas, y sobre las restantes medir B . Matemáticamente, el enunciado del “principio” establece que

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} | \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle |. \quad (13.17)$$

Este resultado es muy importante. Significa que si dos operadores no son compatibles (o no tienen una base común, o su conmutador es distinto de cero, que todo es lo mismo) entonces, necesariamente, el producto de las dispersiones de los resultados de las medidas es distinto de cero. Como consecuencia de ello, sea cual sea el estado en el que se encuentre el conjunto de partículas, si la función de onda que las describe ($f(x)$) es tal que al medir la dispersión de A es muy pequeña, entonces la dispersión de B será muy grande. Por ejemplo, se puede demostrar que

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (13.18)$$

Esto significa que no existe una función de onda $f(x)$ para estas partículas tal que si los valores de x tienen muy poca dispersión, los valores de p_x también tengan poca dispersión. La interpretación más aceptada de la Física Cuántica afirma incluso algo más. Nos dice que en el mundo microscópico conceptos tales como velocidad o posición no tienen un significado claro. Es cierto que cuando tenemos una partícula (o un conjunto de ellas) cuyo estado está descrito por una función de onda que define con mucha precisión la posición de la partícula, su cantidad de movimiento no está claramente definida. Cuanto mayor sea la precisión con que la función de onda describa la posición de la partícula, con menor precisión describirá su cantidad de movimiento. De ahí a decir que conceptos como el de posición o el de cantidad de movimiento no están plenamente definidos para las partículas microscópicas, y que su significado es mucho más “difuso” que el que tienen en Física Clásica, sólo hay un paso. Sin embargo, hay que andarse con mucho cuidado a la hora de hacer afirmaciones de este tipo; el que la Física Cuántica no describa a veces con precisión ciertos conceptos, no quiere decir que estos tengan una “realidad difusa”. Este es un punto muy polémico y de gran interés.

13.4 El efecto túnel

Ya algo parecido al efecto túnel hemos visto cuando se ha estudiado el oscilador armónico. Sabemos que la Física Cuántica nos lleva a algunos resultados difíciles de entender con nuestra visión clásica de las cosas. Ejemplo de ellos son el que los valores posibles que se pueden obtener al realizar la medida de cierta variable dinámica están limitados (discretizados o cuantizados) o la existencia del principio de incertidumbre. Uno de los ejemplos más notables de esta diferencia entre la Física Clásica y la Física Cuántica es el llamado efecto túnel. Éste no sólo representa una curiosidad chocante con nuestros esquemas clásicos sino que además tiene múltiples aplicaciones en la ingeniería de telecomunicación. Supongamos que tenemos una energía potencial de la forma dada por la figura 13.8 y que la energía de la partícula está por debajo de la barrera de potencial ($E < E_{pmax}$). Clásicamente, cuando

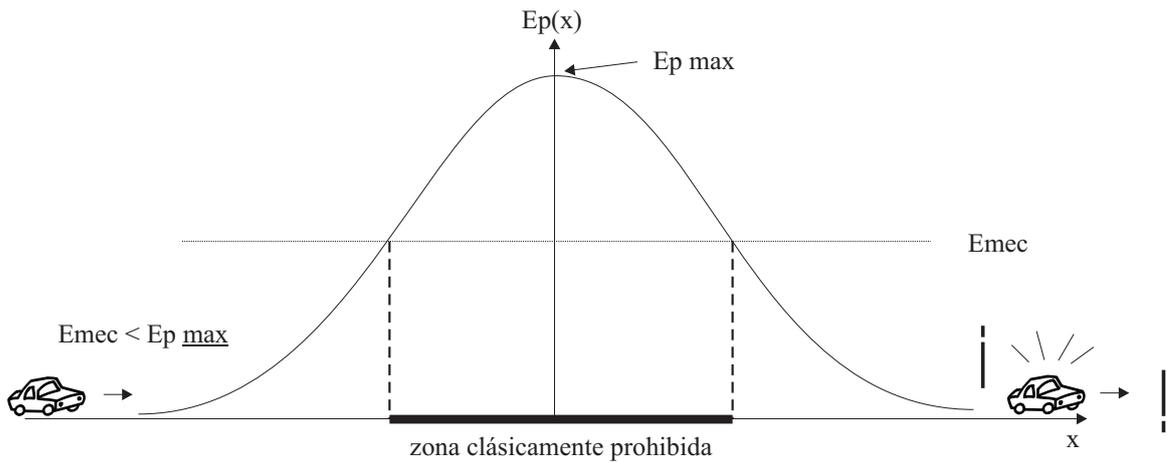


Figura 13.8: Efecto túnel.

la partícula llega a la zona en la que $E_c = E$ debe invertir su movimiento para no entrar en la zona prohibida. Sin embargo, cuánticamente se puede demostrar que existe cierta probabilidad de que la partícula entre en la zona prohibida, atravesando la barrera de potencial y apareciendo al otro lado de ésta. Esto es muy sorprendente. Es como si impulsásemos un coche con una energía cinética que es inferior a la energía potencial que tendría en lo alto de una colina, pero a veces, misteriosamente, el coche apareciera al otro lado de la colina. El estudio del efecto túnel dentro del marco conceptual de la Física Cuántica que estamos desarrollando requiere de conocimientos matemáticos que a esta altura no tenéis. Incluso con estos conocimientos matemáticos el estudio del efecto túnel es bastante laborioso. Ninguno de los libros de la bibliografía que os he recomendado lo realiza con rigor y esto se extiende incluso a la mayoría de los manuales más especializados. Baste por tanto por el momento con esta idea vaga sobre el efecto túnel.

13.5 Problemas

1. (a) Demostrar que la función e^{3x} es una función propia del operador " $\frac{d}{dx}$ ".
¿Cuál es el valor propio correspondiente?
- (b) Demostrar que la función x^4 es una función propia del operador " $x \cdot \frac{d}{dx}$ ".
¿Cuál es el valor propio correspondiente?
- (c) Obtener un operador (excluido el operador $\hat{O} = c\hat{I}$, siendo \hat{I} el operador identidad, definido por $\hat{I}\psi(x, t) = \psi(x, t)$) del cual sea función propia la función $f(x) = \cos(5x)$.

Solución: (a) 3; (b) 4.

2. Probar que el operador $c\hat{A}^n$, donde c es un número y $n = 0, 1, 2, \dots$, tiene por funciones propias $\{f_i(x)\}$ y valores propios $\{ca_i^n\}$, donde $\{f_i(x)\}$ y $\{a_i\}$ son las funciones propias y los autovalores del operador \hat{A} .

Ayuda: Establecer el resultado para $n = 0$ y $n = 1$; luego demostrar que el resultado es válido para todo $n \geq 2$ si lo es para $n - 1$.

3. Dados dos operadores \hat{A} y \hat{B} , se define el conmutador de \hat{A} con \hat{B} por el operador

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A},$$

y se representa por $[\hat{A}, \hat{B}]$. Cuando $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ se dice ⁶ que los dos operadores *conmutan* entre sí.

Se pide:

- (a) Demostrar que todo operador conmuta consigo mismo.
- (b) Demostrar que $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$.
- (c) Sea \hat{I} el operador identidad. Demostrar que $[\hat{I}, \hat{A}] = 0$, para cualquier operador \hat{A} .
- (d) Demostrar que

$$[\hat{A}, c\hat{C} + d\hat{D}] = c[\hat{A}, \hat{C}] + d[\hat{A}, \hat{D}],$$

siendo c y d números cualesquiera.

- (e) Demostrar la relación

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}.$$

4. Obtener el conmutador de los operadores posición y cantidad de movimiento asociados a una partícula cuántica moviéndose en el eje OX .

Solución: $i\hbar\hat{I}$, siendo \hat{I} el operador identidad.

⁶Cuando escribimos $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ estamos indicando que el conmutador de \hat{A} y \hat{B} es igual al operador nulo $\hat{0}$ definido por $\hat{0}\psi(x, t) = 0$.

5. Sean \hat{x} , \hat{p} , \hat{E}_c , $\hat{V} = (1/2)k\hat{x}^2$, y \hat{E} los operadores posición, cantidad de movimiento, energía cinética, energía potencial, y energía total, asociados a un oscilador cuántico de masa m moviéndose en el eje OX . Obtener los conmutadores $[\hat{x}, \hat{E}_c]$, $[\hat{x}, \hat{V}]$, y $[\hat{x}, \hat{E}]$.

Nota: Uséense los resultados de los problemas anteriores.

6. (a) Demostrar que una partícula de un gramo puede tener definida su posición con una precisión de 0.001 micra y su velocidad con la de 0.001 micra por siglo, sin que se viole el principio de incertidumbre.

(b) Para un electrón ($m_e \approx 10^{-27} gr$) confinado en un intervalo del orden de un diámetro atómico (distancia $\approx 10^{-8} cm$), ¿cuál es el valor mínimo de la incertidumbre en la velocidad?

7. Dos magnitudes físicas, A y B , de un sistema cuántico están representadas por los operadores \hat{A} y \hat{B} respectivamente. Sean a_i y $\alpha_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) los valores propios y funciones propias del operador \hat{A} , y b_j y $\beta_j(x)$ los correspondientes a \hat{B} . La expresión de las funciones propias de \hat{B} a partir de las de \hat{A} es:

$$\beta_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1(x) + \frac{1}{2}\alpha_2(x) \quad ; \quad \beta_2(x) = \frac{1}{2}\alpha_1(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2(x) \quad ; \quad \beta_3(x) = \alpha_3(x).$$

Se pide:

- (a) Este desarrollo es compatible con la ortonormalidad de $\{\alpha_i(x)\}$ y $\{\beta_i(x)\}$. Demuéstrese por ejemplo (usando la ortonormalidad de $\{\alpha_i(x)\}$) que $\beta_1(x)$ y $\beta_2(x)$ son ortogonales.
- (b) Desarrollar los vectores propios de \hat{A} en función de los de \hat{B} .
- (c) ¿Cuál es el valor medio de \hat{A} en $\beta_1(x)$?
- (d) Si el sistema se encuentra en el estado $\alpha_2(x)$, ¿qué probabilidad hay de que una medida de \hat{B} dé como resultado b_2 ?
- (e) ¿Cuál es el valor medio de \hat{A} en el estado (normalizarlo previamente) $(\sqrt{3}/2)\beta_1(x) + (1/\sqrt{2})\beta_2(x) + (1/\sqrt{2})\beta_3(x)$? ¿Y la desviación cuadrática media?
8. Sean \hat{A} y \hat{B} los operadores que representan a las magnitudes físicas A y B de una partícula cuántica, y sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ los autoestados de \hat{A} (con autovalores a_1 y a_2 respectivamente), y $g_1(x)$ y $g_2(x)$ los de \hat{B} , (con autovalores b_1 y b_2 respectivamente), verificándose las relaciones

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[g_1(x) + g_2(x)] \quad ; \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[g_1(x) - g_2(x)]$$

Si medimos A en 1000000 partículas que se encuentran en el estado $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}g_1(x) + \sqrt{\frac{2}{3}}g_2(x)$, ¿en cuántas se obtendrá a_2 ?

9. El estudio mecánico-cuántico de una partícula de masa m obligada a moverse, dentro del intervalo $[0, L]$ del eje OX (dentro del intervalo puede moverse libremente pero no puede salir de él; es lo que se conoce por *pozo de potencial*) da como resultado las siguientes funciones propias del operador energía dentro del intervalo (fuera de él la función de onda es cero):

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

donde $n \geq 1$. Los correspondientes autovalores del operador energía son:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

Se pide:

- $\{f_n(x)\}$ es un conjunto ortonormal. Comprobar por ejemplo que $f_1(x)$ está normalizada, y que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son ortogonales.
 - Representar gráficamente el estado de energía mínima (estado fundamental) y el primer estado excitado ($n = 2$), así como las densidades de probabilidad de presencia de la partícula asociadas a dichas funciones propias.
 - ¿Cuántos nodos tiene $f_n(x)$ dentro del intervalo?
 - Obtener la separación relativa de los niveles de energía, definida por $(E_{n+1} - E_n)/E_n$.
10. Demostrar que la incertidumbre de la cantidad de movimiento de cualquier partícula en un pozo de potencial no puede ser nunca inferior a $\hbar/2L$.
11. Una partícula de masa m se encuentra en un pozo cuadrado infinito de anchura L , siendo su estado inicial⁷:

$$\psi_0(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} f_1(x) + \frac{1}{2} f_2(x),$$

donde $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son las funciones propias correspondientes a los dos primeros niveles energéticos (ver problema anterior). Se pide:

- Comprobar que $\psi_0(x)$ está normalizado.
- Obtener la función de onda y la densidad de probabilidad de presencia de la partícula en función del tiempo.
- Si se mide la energía del sistema en un instante t , ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidades?

⁷Para hacer este problema y el siguiente hágase uso de la expresión de las funciones propias y los autovalores del operador energía que se dan en el problema anterior.

(d) Obtener el valor medio de la energía y su desviación cuadrática media en el instante t .

12. Una partícula de masa m se encuentra en un pozo cuadrado infinito de anchura L , siendo su estado inicial:

$$\psi_0(x) = e^{i\pi/3} \frac{1}{\sqrt{3}} f_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} f_2(x) + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{i\pi/4} f_3(x),$$

donde $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$ son las funciones propias correspondientes a los tres primeros niveles energéticos. Se pide:

- Ver si $\psi_0(x)$ está normalizado, y normalizarlo en caso de que no lo esté.
- Valor medio de la energía en el instante inicial.
- Obtener el estado para $t > 0$, así como el valor medio de la energía.
- Si se hace una medida de la energía en un instante dado t_1 , ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?
- Suponiendo que la medida anterior dé como resultado E_3 , ¿cuál es el estado inmediatamente posterior a la medida? ¿Y para $t_2 > t_1$?
- Representar gráficamente la densidad de probabilidad para $t = t_2$.

13. Una partícula cuántica se encuentra en un pozo cuadrado infinito de longitud L , en el autoestado de la energía $f_1(x) = \sqrt{2/L} \times \sin(\pi x/L)$, siendo $\pi^2 \hbar^2 / 2mL^2$ el autovalor correspondiente (fuera del intervalo $(0, L)$ la función de onda vale cero). ¿Cuáles son los valores medios de la posición y la cantidad de movimiento en $f_1(x)$?

14. Una partícula clásica de masa $m = 1 \text{ gr}$ se mueve en el eje OX sometida a la fuerza $\vec{F} = -kx\vec{i}$, siendo $k = 0.4 \text{ Nm}^{-1}$. Si la partícula tiene una energía total $E = 1.8 \times 10^{-5} \text{ J}$, ¿en qué zona de la recta real es imposible encontrar a la partícula en una medida de la posición?

15. Sea una partícula cuántica de masa m en un potencial de oscilador armónico $V(x) = (1/2)kx^2$, la cual se encuentra en el estado fundamental ⁸ (estado de

⁸Los autovalores del operador energía asociado al oscilador armónico cuántico están dados por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega ; n = 0, 1, 2, \dots,$$

y las correspondientes funciones propias son

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{2n-1}{4}} e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \frac{d}{dx^n} \left[e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\right],$$

siendo $\omega = \sqrt{k/m}$.

mínima energía). ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre en la zona clásicamente prohibida?

Solución: $(2/\sqrt{\pi}) \int_1^\infty e^{-u^2} du$

16. (a) Obtener la separación relativa de los niveles de energía del oscilador armónico cuántico en torno al valor E_n , definida por

$$\Delta_n = \frac{E_{n+1} - E_n}{E_n}.$$

(b) Suponiendo que la expresión de los niveles energéticos del oscilador cuántico se puede aplicar a un oscilador armónico clásico obtener, para una partícula clásica de masa $m = 1 \text{ gr}$ que oscila con una frecuencia $\nu = 1 \text{ Hz}$ y una amplitud $A = 1 \text{ cm}$, el número cuántico n , la separación relativa Δ_n , y el nivel energético más bajo.

17. Una partícula cuántica de masa m se encuentra sometida a un potencial de oscilador armónico $V(x) = (1/2)kx^2$. En $t = 0$ se efectúa una medida de la energía, obteniéndose como resultado el valor $(3/2)\hbar\omega$, siendo $\omega = \sqrt{k/m}$. Se pide:

- (a) Escribir la función de onda para $t > 0$.
- (b) Obtener los puntos donde es máxima y mínima la densidad de probabilidad de presencia de la partícula, así como los valores de dicha densidad en esos puntos.