Teoría de errores y presentación de resultados

Física I y Física II

Todos los Grados

Índice

- Unidades
- Cifras significativas
- Error en la medida
  - Expresión de una magnitud con su error
    - Regla de redondeo
  - Cálculo de errores
    - Medida directa
    - Medida indirecta
- Rectas de mejor ajuste

Unidades

- Se recomienda siempre el Sistema Internacional (SI):
  - m, s, kg, A, C, V, Ω, Hz, H, F, T...
- Los prefijos pueden usarse con moderación en los resultados finales
  - pF, mA, kHz,... SÍ
  - mV/mA, kΩ·μs, μs^{-1},... NO
- Todas las cantidades con dimensiones deben ir acompañadas de sus unidades

Cifras significativas

- Número de cifras de un dato
- Ejemplos:

Dato	Cifras significativas
318 kg	3
12.45 V	4
0.0321 A	3
23.30 J	4
45000 m	Ambiguo

Error en la medida

Mejor llamarlo incertidumbre

- Tipos de error (según la causa)
  - Sistemático $\longrightarrow$ eliminable si se conoce
  - Aleatorio $\longrightarrow$ bandas de error
- Expresión del error: $x \pm E_x$

  Ej: $V_0 = 3.2 \pm 0.3$ V

  Forma compacta: $V_0 = 3.2(3)$ V
- El error absoluto tiene unidades
- Error *relativo*: $\varepsilon_x = E_x / x$ (¡Adimensional!)

Expresión de la cantidad con su error

- La banda de error limita el número de cifras significativas:

$$U = 2.3\cancel{2865} \pm 0.312689 \text{ J}$$

  - Si el resultado es incierto en su primera cifra decimal no tiene sentido dar más

$$U = 2.3 \pm 0.3\cancel{12689} \text{ J}$$

  - Las primeras cifras del error nos dicen donde está la incertidumbre

Reglas de **redondeo**

1. Se escriben cantidad y error con todas sus cifras:

$$R = 2.83256 \pm 0.08621\,\Omega$$

2. Se examinan las dos primeras cifras del error: ¿Son ≤25?
   - Si: se retienen ambas y se redondea
   - No: se retiene la primera y se redondea

$$R = 2.83256 \pm 0.09\ \Omega$$

3. Se toman las cifras significativas que marca el error y se redondea

$$R = 2.83 \pm 0.09\ \Omega$$

Redondeo: afecta a la última cifra retenida
- Si la siguiente cifra es <5: **se mantiene**
- Si la cifra siguiente es ≥5: **se incrementa una unidad**

Reglas de **redondeo**

1. Se escriben la cantidad y su error con todas sus cifras:

$I = 2.30408415 \pm 0.002156\ \mathrm{A}$
$I = 2.30408415 \pm 0.03674\ \mathrm{A}$
$I = 2.30408415 \pm 0.2036\ \mathrm{A}$
$I = 2.30408415 \pm 2.87\ \mathrm{A}$
$I = 2.30408415 \pm 234\ \mathrm{A}$
$I = 2.30408415 \pm 0.00962\ \mathrm{A}$
$I = 2.30408415 \pm 0.257\ \mathrm{A}$

Reglas de **redondeo**

2. Se examinan las dos primeras cifras del error: ¿Son ≤25?
   - **Si**: se retienen ambas y se redondea
   - **No**: se retiene la primera y se redondea

$I = 2.30408415 \pm 0.002156$ A	$\Rightarrow$ 0.0022 A
$I = 2.30408415 \pm 0.03674$ A	$\Rightarrow$ 0.04 A
$I = 2.30408415 \pm 0.2036$ A	$\Rightarrow$ 0.20 A
$I = 2.30408415 \pm 2.87$ A	$\Rightarrow$ 3 A
$I = 2.30408415 \pm 234$ A	$\Rightarrow$ 230 A
$I = 2.30408415 \pm 0.00962$ A	$\Rightarrow$ 0.010 A
$I = 2.30408415 \pm 0.257$ A	$\Rightarrow$ 0.3 A

Reglas de **redondeo**

3. Se toman las cifras significativas que marca el error y se redondea

$I = 2.30408415 \pm 0.0022$ A	$\Rightarrow$ $I = 2.3041 \pm 0.0022$ A
$I = 2.30408415 \pm 0.04$ A	$\Rightarrow$ $I = 2.30 \pm 0.04$ A
$I = 2.30408415 \pm 0.20$ A	$\Rightarrow$ $I = 2.30 \pm 0.20$ A
$I = 2.30408415 \pm 3$ A	$\Rightarrow$ $I = 2 \pm 3$ A
$I = 002.30408415 \pm 230$ A	$\Rightarrow$ $I = 0 \pm 230$ A
$I = 2.30408415 \pm 0.010$ A	$\Rightarrow$ $I = 2.304 \pm 0.010$ A
$I = 2.30408415 \pm 0.3$ A	$\Rightarrow$ $I = 2.3 \pm 0.3$ A

Reglas de **redondeo**

4. Resumiendo...

$I = 2.30408415 \pm 0.002156\mathrm{A}$	$I = 2.3041 \pm 0.0022\mathrm{A}$	$I = 2.3041(22)\mathrm{A}$
$I = 2.30408415 \pm 0.03674\mathrm{A}$	$I = 2.30 \pm 0.04\mathrm{A}$	$I = 2.30(4)\mathrm{A}$
$I = 2.30408415 \pm 0.2036\mathrm{A}$	$I = 2.3 \pm 0.2\mathrm{A}$	$I = 2.3(2)\mathrm{A}$
$I = 2.30408415 \pm 2.87\mathrm{A}$	$I = 2 \pm 3\mathrm{A}$	$I = 2(3)\mathrm{A}$
$I = 2.30408415 \pm 234\mathrm{A}$	$I = 0 \pm 230\mathrm{A}$	$I = 0(230)\mathrm{A}$
$I = 2.30408415 \pm 0.00962\mathrm{A}$	$I = 2.304 \pm 0.010\mathrm{A}$	$I = 2.304(10)\mathrm{A}$
$I = 2.30408415 \pm 0.257\mathrm{A}$	$I = 2.3 \pm 0.3\mathrm{A}$	$I = 2.3(3)\mathrm{A}$

Cálculo de errores

Estudiaremos diferentes casos:

- Medida directa
  - Una sola medida
  - Varias medidas
- Medida indirecta
  - Función de una sola variable: $z = f(x)$
  - Función de varias variables: $z = f(x, y, \ldots)$

Error de una medida directa

- El error se tomará como la ***precisión*** del aparato (mínimo incremento entre medidas), independientemente de que se trate de un aparato de medida analógico o digital.
  - Si ha de enrasarse por dos extremos, ya no es una medida directa, sino indirecta, que resulta de la resta entre ambas medidas (ver apartado de medida indirecta función de varias variables).

Error de varias medidas directas

- Se realizan si existe una incertidumbre no achacable al aparato de medida:
- Medidas: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$
- Resultado: media aritmética

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

- Error: doble de la desviación cuadrática media de la media de los datos

$$E_x = 2\sigma_{\overline{x}} = 2\sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

Si E_x es menor que el error del instrumento de medida, se escoge este último

Error de varias medidas directas

- Error: cantidades relacionadas
  - σ_n : desviación estándar de la población ($x\sigma_n$ en las calculadoras)

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

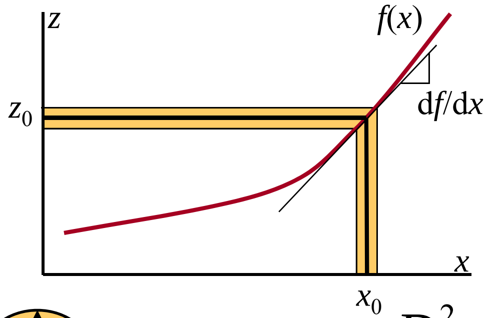
  - $\sigma_{n\text{-}1}$: desviación estándar de la muestra ($x\sigma_{n\text{-}1}$ en las calculadoras)

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

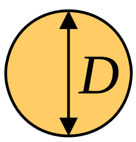
$$E_x = \frac{2\sigma_n}{\sqrt{n-1}} = \frac{2\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Error de una medida indirecta
Función de una variable

- Suponemos: $x = x_0 \pm E_x$ con $z = f(x)$
- Resultado: $z_0 = f(x_0)$
- Error: $E_z = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} E_x$



Ejemplo: sección de un cable:



$$S = \frac{\pi D_0^2}{4}$$

Error de la medida:

$$E_s = \left|\frac{\partial S}{\partial D}\right|_{D_0} E_D = \frac{\pi D_0}{2} E_D$$

Error de una medida indirecta
Función de una variable

- Algunos casos sencillos:
  - Una variable proporcional a otra:

$$y = Kx \Longrightarrow E_y = \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x_0} E_x = KE_x \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_x$$

  - Función exponencial:

$$y = ae^x \Longrightarrow E_y = ae^x E_x = yE_x \qquad \varepsilon_y = E_x$$

  - Logaritmo:

$$y = \ln x \Longrightarrow E_y = \frac{E_x}{x} \qquad E_y = \varepsilon_x$$

Error de una medida indirecta
Función de varias variables

- Suponemos: $z = f(x, y, w)$

$$x = x_0 \pm E_x \;;\; y = y_0 \pm E_y \;;\; w = w_0 \pm E_w$$

- Resultado: $z_0 = f\left(x_0, y_0, w_0\right)$
- Error:

$$E_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0}^2 E_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_0}^2 E_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{w_0}^2 E_w^2}$$

Válido si las variables son *independientes*

Ejemplos de errores

- Suma o diferencia

$$z = x \pm y \pm \cdots \Longrightarrow E_z = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + \cdots}$$

- Producto o cociente

$$z = \frac{x\,y\cdots}{u\,v\cdots} \Longrightarrow \ln z = \ln x + \ln y - \ln u - \ln v + \cdots$$

$$\Longrightarrow \varepsilon_z = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_u^2 + \varepsilon_v^2 + \cdots}$$

Estimación: el error relativo de z es del orden del mayor de los errores relativos de sus argumentos

Unidades y errores

- Todos los datos deben ir acompañados de sus **errores**, si se conocen, y de sus **unidades**.
- Serie de medidas consecutivas

17(1) mm – 15(1) mm – 12(1) mm – 8(1) mm

17 – 15 – 12 – 8 (±1mm)

- Tablas:

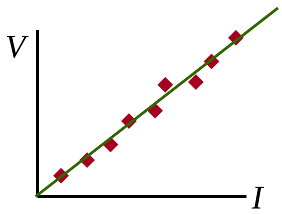
I(±0.1mA)	V(±0.1V)
1.0	2.1
2.0	4.3
3.2	6.2

I(mA)	V(V)
1.0(1)	2.1(1)
2.0(3)	4.3(1)
3.2(2)	6.2(2)

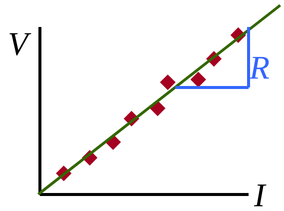
I	V(V)
1.03(1) mA	2.1(1)
870(1) μA	1.8(1)
640(1) μA	1.3(2)

Rectas de mejor ajuste

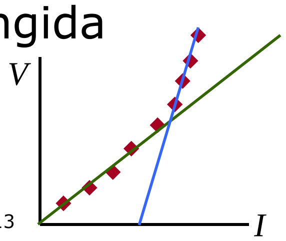
- Estudio de la dependencia (lineal) de una variable con otra. Permite:
- Verificar relación lineal



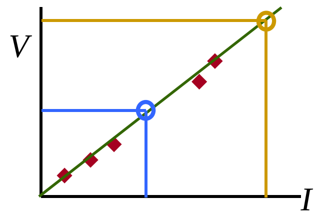
- Determinar una magnitud de forma indirecta



- Ajustar una función no lineal en una región restringida



- Interpolación o extrapolación



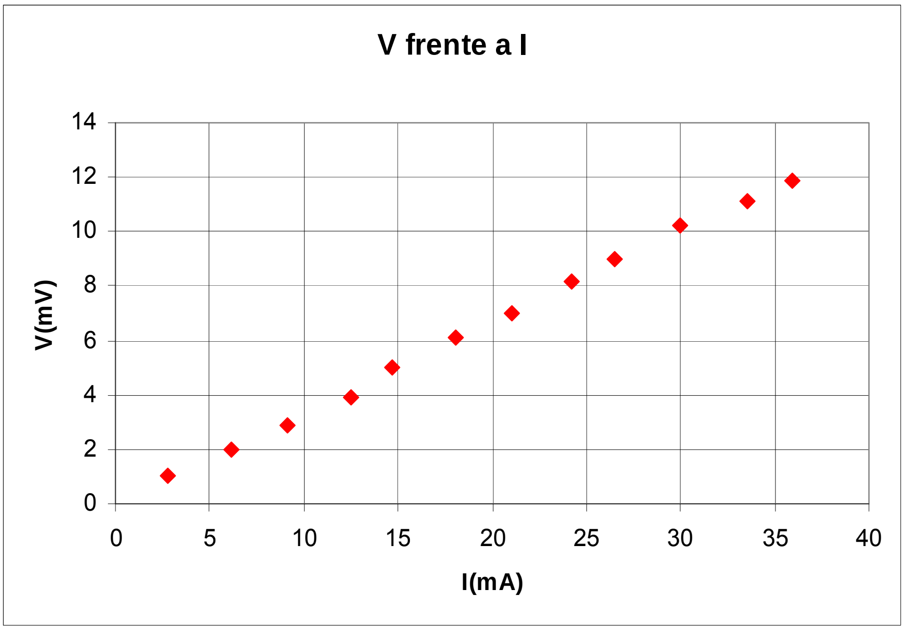
Gráfica de los datos

$V(\pm 0.1\text{mV})$	$I(\pm 0.1\text{mA})$
1.0	2.8
2.0	6.2
2.9	9.1
3.9	12.5
5.0	14.7
6.1	18.1
7.0	21.0
8.2	24.2
9.0	26.5
10.2	30.0
11.1	33.5
11.9	35.9

- Paso 1: gráfica de los datos
  - Permite verificar relación lineal.
  - Permite eliminar puntos erróneos.

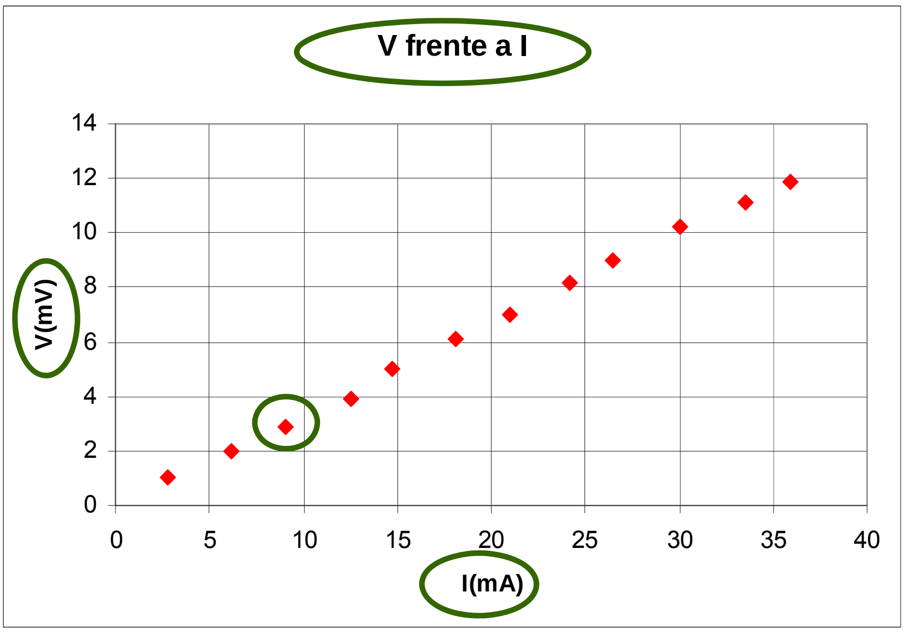
Gráfica de los datos

$V(\pm 0.1\text{mV})$	$I(\pm 0.1\text{mA})$
1.0	2.8
2.0	6.2
2.9	9.1
3.9	12.5
5.0	14.7
6.1	18.1
7.0	21.0
8.2	24.2
9.0	26.5
10.2	30.0
11.1	33.5
11.9	35.9



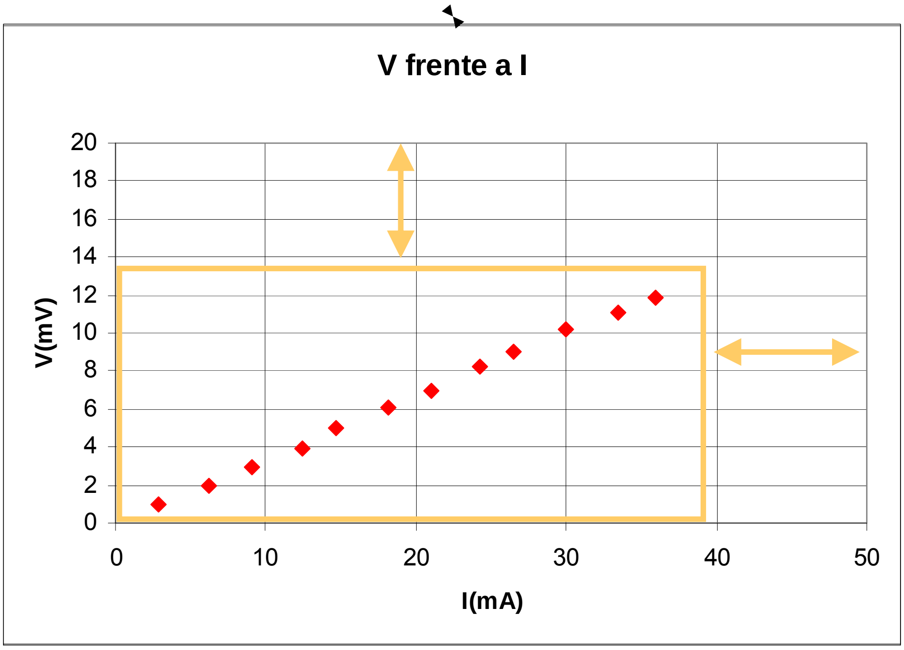
Gráfica de los datos

- Marcar claramente datos experimentales (aspas si se representan a mano)
- No señalar datos experimentales en los ejes
- Magnitudes y unidades en los ejes
- Debe ocupar toda la página



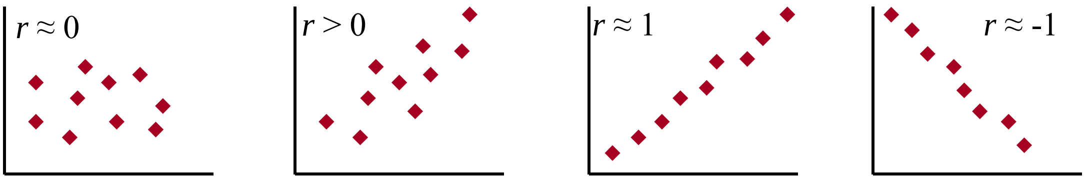
Gráfica de los datos

- Marcar claramente datos experimentales (aspas si se representan a mano)
- No señalar datos experimentales en los ejes
- Magnitudes y unidades en los ejes
- Debe ocupar toda la página



Coeficiente de correlación

- Paso 2: Obtención del coeficiente de correlación (r)
  - Es una medida del grado de alineación
  - $r \in (-1,1)$



  - No tiene error
  - No tiene unidades

Redondeo: hasta la primera cifra distinta de 9.

Ejemplos	$r = 0.999678 \rightarrow r = 0.9996$
$r = -0.99128 \rightarrow r = -0.991$	$r = 1.099678 \rightarrow$ ERRÓNEO

Pendiente y ordenada en el origen

- Paso 3: Obtención de pendiente y ordenada en el origen: $y = a+bx$
  - Tienen **unidades** que hay que especificar
  - Tienen **error**: hay que redondear

a y b lo dan las calculadoras $\qquad E_b = \dfrac{2b}{r}\sqrt{\dfrac{1-r^2}{N-2}} \qquad E_a = E_b\sqrt{\dfrac{\sum x_i^2}{N}}$

Ejemplo:

$V=a+bI$

$r = 0.99934675 \Rightarrow r = 0.9993$

$b = 0.3366870\ \Omega$

$E_b = 0.00770058\ \Omega \Rightarrow b = R = 0.337 \pm 0.008\ \Omega$

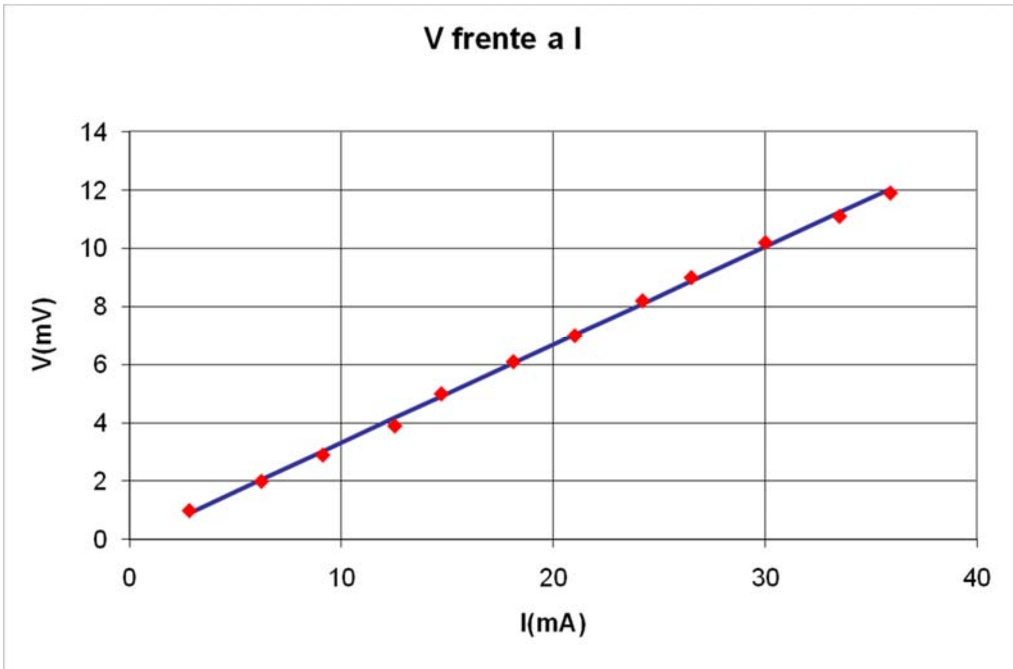
$a = -0.05442597\ \text{mV}$

$E_a = 0.17030002\ \text{mV} \Rightarrow a = -0.05 \pm 0.17\ \text{mV}$

Trazado de la recta

- Paso 4: Trazado de la recta de mejor ajuste sobre la gráfica
  - Se realiza a partir de dos puntos
  - Estos puntos **NO SE REPRESENTAN**
  - Debe observarse si, efectivamente, es la recta de mejor ajuste

Trazado de la recta



Rectas exponenciales: cálculo

- En muchas situaciones prácticas aparecen funciones de la forma

$$z = K\mathrm{e}^{bx}$$

- Se transforman en rectas tomando logaritmos

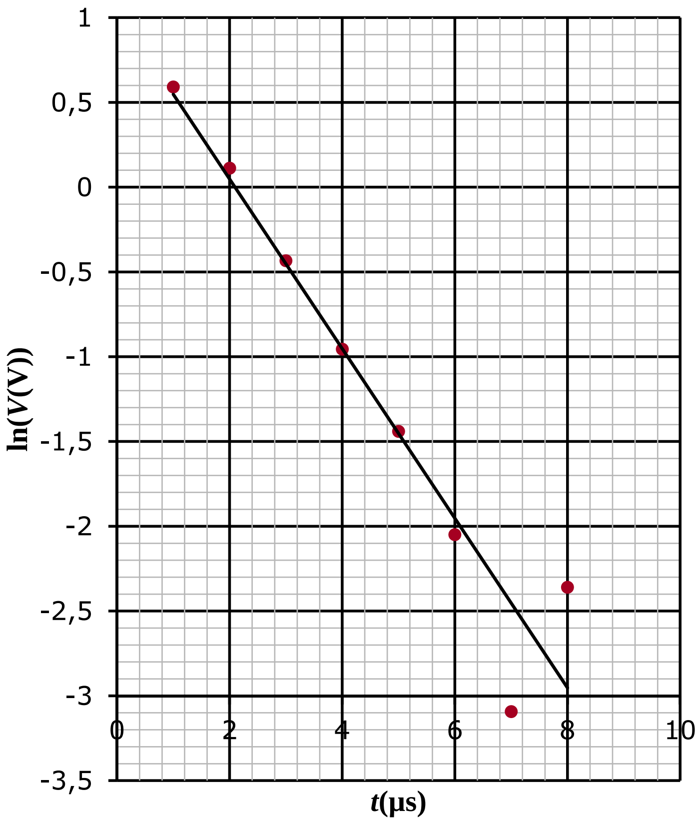
$$y = \ln(z) = \ln K + bx = a + bx$$

- a y b se hallan de la forma usual
- El factor K se halla

$$K = \mathrm{e}^{a} \qquad E_K = \left|\frac{\partial K}{\partial a}\right| E_a = KE_a$$

Rectas exponenciales: representación

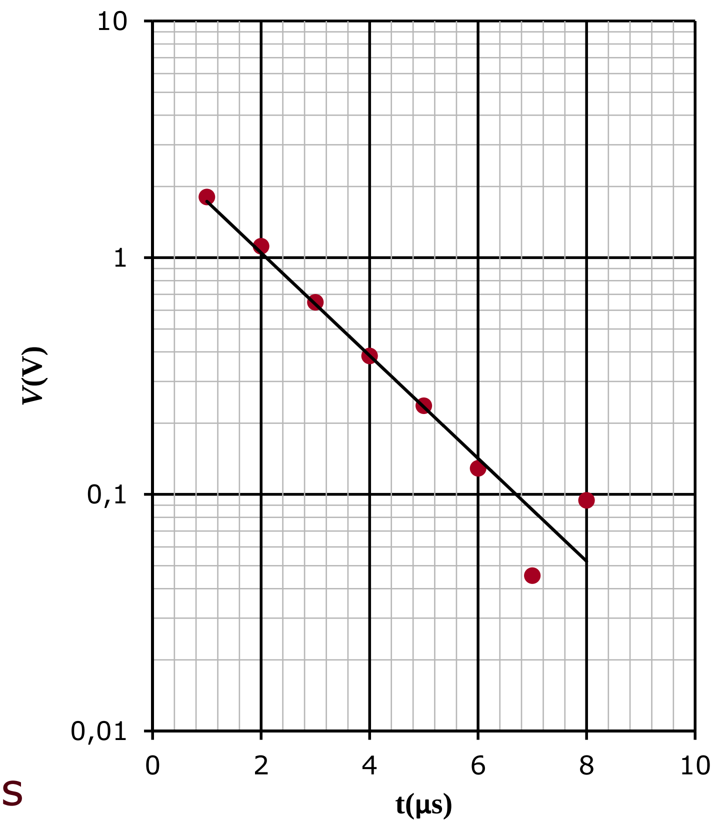
Puede hacerse la gráfica de y=ln(z) frente a x.



Rectas exponenciales: representación

Empleando papel semi-logarítmico pueden ponerse directamente las magnitudes

¡Ojo! Se emplean logaritmos decimales



Rectas potenciales: cálculo

- En ocasiones se tiene una ley potencial de exponente desconocido

$$z = Kt^n \qquad n\text{: exponente}$$

- Se transforman en rectas tomando logaritmos

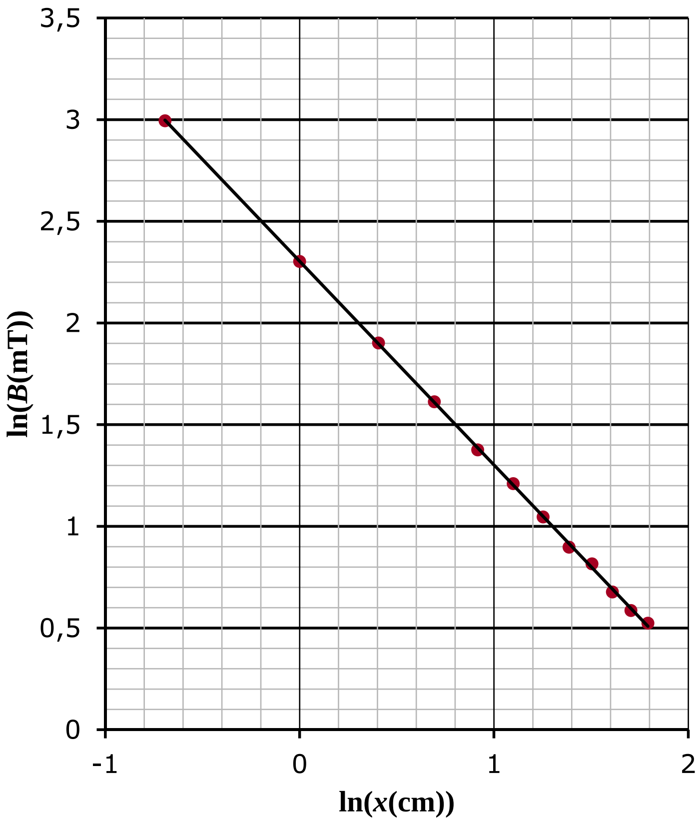
$$y = \ln(z) = \ln K + n\ln t = a + bx \qquad a = \ln K \quad b = n \quad x = \ln t$$

- a y b se hallan de la forma usual
- El factor K se halla:

$$K = \mathrm{e}^a \qquad E_K = \left|\frac{\partial K}{\partial a}\right| E_a = KE_a$$

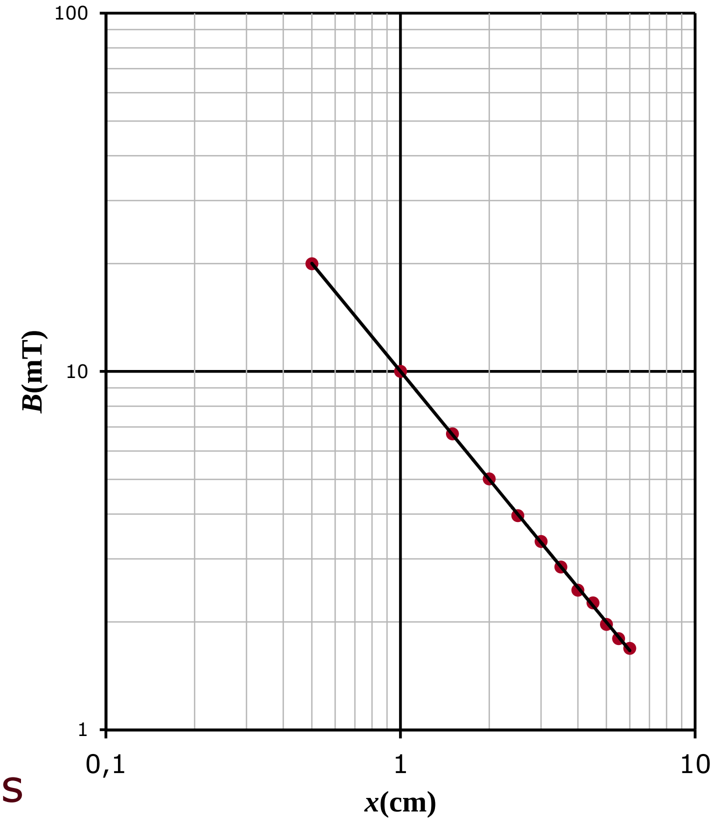
Rectas potenciales: representación

Puede hacerse la gráfica de y=ln(z) frente a x=ln(t).



Rectas potenciales: representación

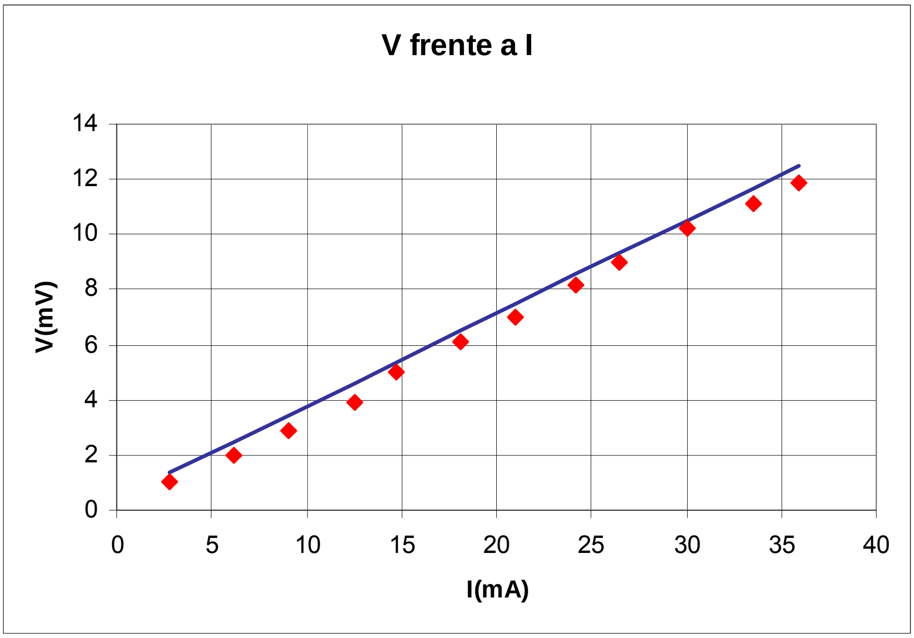
Empleando papel log-log pueden ponerse directamente las magnitudes



¡Ojo! Se emplean logaritmos decimales

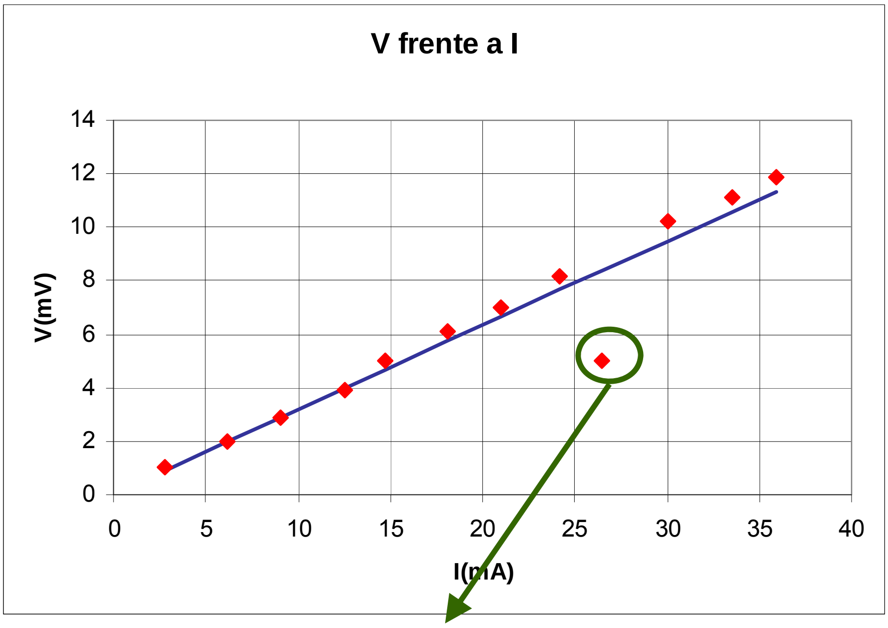
Rectas de mejor ajuste: ejemplos

¡Recta mal calculada o mal trazada!



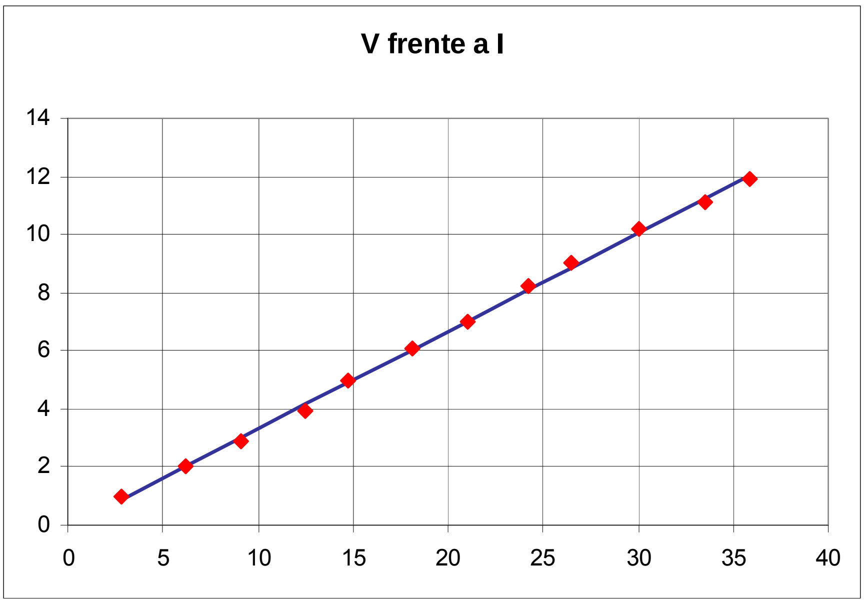
La ordenada en el origen es incorrecta

Rectas de mejor ajuste: ejemplos



¡Punto erróneo!: debe eliminarse

Rectas de mejor ajuste: ejemplos

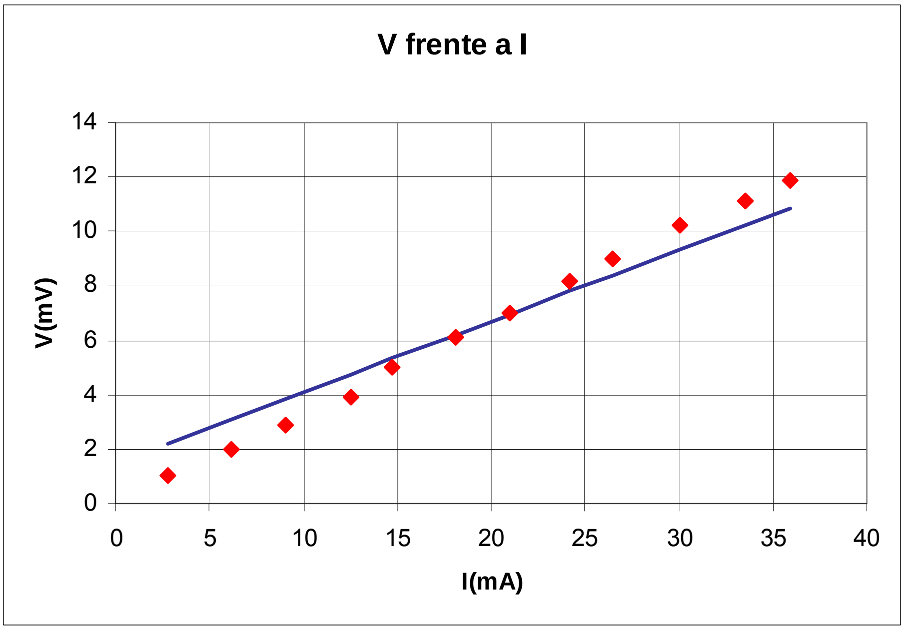


¡Faltan etiquetas en los ejes!

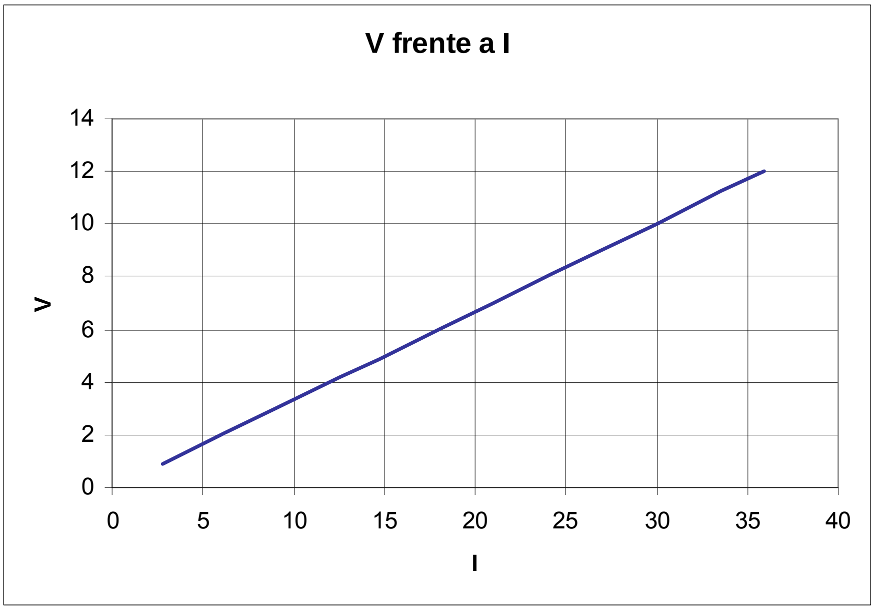
Rectas de mejor ajuste: ejemplos

¡Recta mal calculada o mal trazada!

La pendiente de la recta es incorrecta

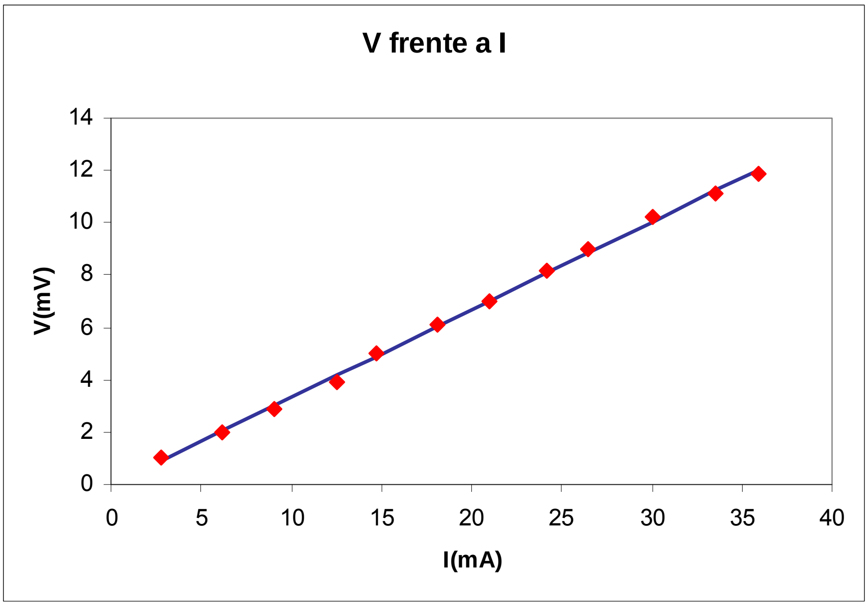


Rectas de mejor ajuste: ejemplos



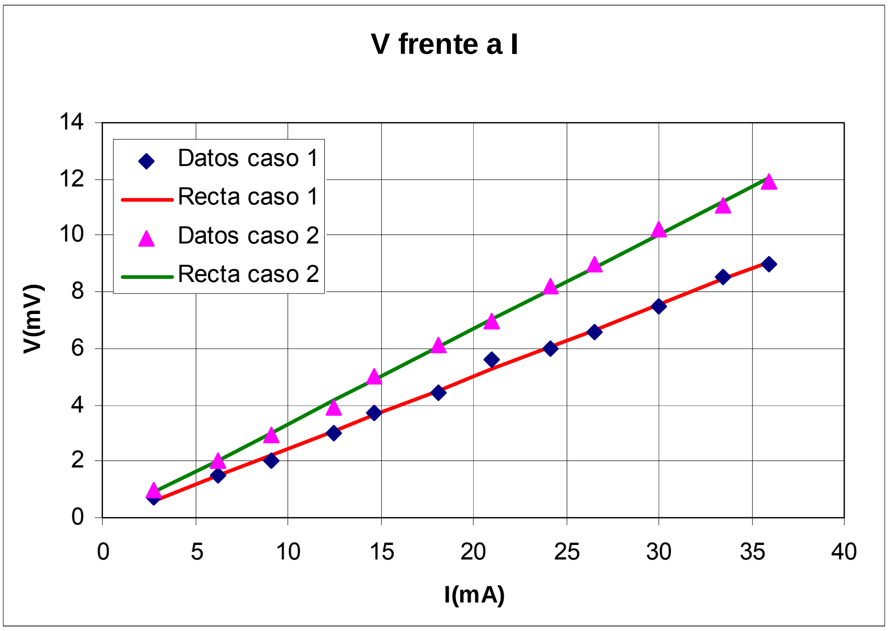
¡Faltan puntos experimentales y unidades!

Rectas de mejor ajuste: ejemplos



Para gráficas por ordenador: incluir tramas

Rectas de mejor ajuste: ejemplos



Para varias curvas: distintos símbolos y colores

Rectas de mejor ajuste

Resumen de pasos a seguir:

- Representar los datos experimentales
- Obtener el coeficiente de correlación
- Calcular de la pendiente y la ordenada en el origen con su error
- Obtener información física
- Representar la recta de mejor ajuste

Cosas que nunca hay que olvidar

- Poner todas las unidades
- Poner todos los errores
- Redondear correctamente
- El error absoluto tiene unidades
- a y b tienen unidades
- Poner los puntos en las gráficas
- Poner las unidades en las gráficas