Práctica 11. Asociación de dos muelles en paralelo

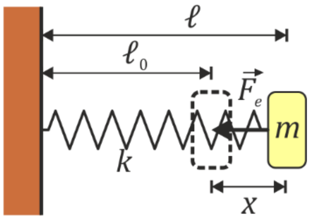
1. Objeto de la práctica

En esta práctica se determinará la constante elástica de un muelle utilizando un montaje en paralelo de dos muelles idénticos. Para ello se medirá la elongación que sufren los muelles en equilibrio estático, para distintas masas que cuelgan del soporte situado en el centro de la barra que los une, en presencia del campo gravitatorio terrestre. Sabiendo que la constante elástica del montaje en paralelo de dos muelles es la suma de las constantes de cada uno de los muelles, y siendo ambos idénticos en este caso, la constante obtenida para el montaje en paralelo será el doble del valor de la de cada uno de ellos.

2. Fundamento teórico

2.1 Ley de Hooke

Considérese la situación de la figura.

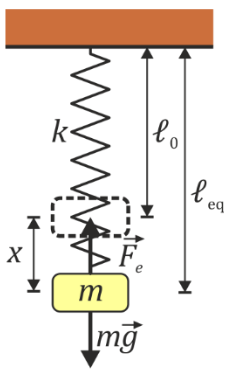


Un muelle ideal de longitud natural ℓ_0 se encuentra en el eje OX, manteniendo uno de sus extremos fijo al origen de coordenadas, y el otro en contacto con un objeto puntual P de masa m. La fuerza que actúa sobre P viene dada por la Ley de Hooke:

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{\imath} \tag{1}$$

donde la constante k recibe el nombre de constante elástica o recuperadora y ℓ es la longitud del muelle en un instante dado. A la diferencia $x = \ell - \ell_0$ se la denomina elongación del muelle.

2.2 Equilibrio



Considérese el sistema de la figura. Un muelle ideal, de constante elástica k y longitud natural ℓ_0, se encuentra suspendido verticalmente de un punto fijo, en presencia del campo gravitatorio terrestre, estando su otro extremo unido a una partícula de masa m. Se toma como coordenada la longitud del muelle, ℓ, medida desde su extremo superior, de manera que el eje X es vertical y hacia abajo.

Las fuerzas que actúan sobre la partícula son la fuerza elástica, $\vec{F}_e = -k(\ell - \ell_0)\vec{\imath}$, y el peso, $m\vec{g} = mg\vec{\imath}$. Se define la posición de equilibrio como aquella en la que, si se deja la masa en reposo, permanece en reposo. La condición para que ello ocurra es que la fuerza neta sobre la masa sea nula

$$-k(\ell_{\mathrm{eq}} - \ell_0) + mg = 0 \tag{2}$$

De aquí resulta una longitud de equilibrio superior a la natural, debido a la acción del peso.

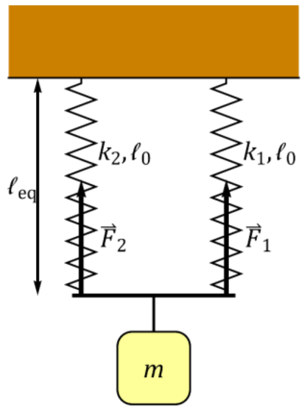
$$\ell_{\mathrm{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k} \tag{3}$$

2.3 Asociación de dos muelles en paralelo

Si se colocan dos muelles en paralelo, en lugar de uno solo, y se hacen pasar por sus extremos dos varillas, de manera que de un punto de la inferior pendan las distintas masas mediante un soporte, puede obtenerse la posición de equilibrio para el nuevo montaje. La situación general de equilibrio puede llegar a ser muy complicada, e intervienen equilibrios de fuerzas y de momentos.

Para simplificar, pretendemos que las elongaciones sean una misma para los dos muelles, $l_1 = l_2$, para todos los valores de las masas que vayamos colgando de la varilla, independientemente de si son iguales sus constantes o no. Esto se consigue para cada masa colgando de un punto de la varilla inferior de tal forma que el momento de las fuerzas que actúan sobre la varilla produzcan un equilibrio horizontal. Esto debe buscarse por tanteo.

En cuanto a las fuerzas que actúan sobre la masa m, serán ahora las fuerzas elásticas $\overrightarrow{F_1}$ y $\overrightarrow{F_2}$ debidas a cada muelle y el peso. Las constantes de cada muelle se denominarán k_1 y k_2, respectivamente.



Llamamos ℓ_0 a la longitud del montaje cuando no cuelga ninguna pesa de la varilla, y ℓ_{eq} a la longitud de equilibrio que se va obteniendo a medida que se cuelgan las pesas:

$$-k_1(\ell_{\mathrm{eq}} - \ell_0) - k_2(\ell_{\mathrm{eq}} - \ell_0) + mg = 0 \tag{4}$$

$$-(k_1 + k_2)(\ell_{\mathrm{eq}} - \ell_0) + mg = 0 \tag{5}$$

$$\ell_{\mathrm{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k_1 + k_2} \tag{6}$$

Por tanto, la asociación en paralelo de dos muelles se comporta como un solo muelle de constante equivalente o efectiva:

$$k_{\mathrm{ef}} = k_1 + k_2 \tag{7}$$

En nuestro caso, los dos muelles van a ser casi idénticos, por lo que podemos llamar k a la constante de cada uno de ellos, y escribir:

$$k_{\mathrm{ef}} \simeq 2k \tag{8}$$

3. Descripción del instrumental

El material preciso para la realización de esta práctica es:

- Dos muelles iguales.
- Un soporte vertical para los muelles, que incluye una varilla roscada.
- Otra varilla roscada, con dos tuercas.
- Un soporte para colgar las pesas de la varilla.
- Un conjunto de pesas (seis pesas de 50g).
- Una regla.

4. Realización de la práctica

4.1 Determinación de la constante de un muelle individual

1. Cuélguese la asociación de los dos muelles en paralelo y mídase la posición de la varilla superior (ℓ_{sup}). <u>No debe colocarse la varilla roscada que conectará los dos resortes</u>.
2. Colóquese el soporte para las pesas en el extremo inferior de uno de los dos muelles.
3. Mídase la posición del extremo inferior (ℓ_{inf}) del muelle cuando no hay masa colgada (pero sí el soporte).
4. En el soporte que cuelga del resorte, insértese una pesa de 50g (para ello haga uso de la moldura que tiene la varilla en su parte superior). Cuando esté en equilibrio estático mídase la posición del extremo inferior del muelle.
5. Anótese en la tabla la masa de la pesa y la longitud del resorte.
6. En el soporte que cuelga del resorte, insértese otra pesa de 50g sin quitar la anterior, que ya está. Cuando esté en equilibrio estático mídase la posición del extremo inferior del muelle.
7. Anótese en la tabla la suma de las masas de las pesas y la nueva longitud del resorte.
8. Repítase los dos apartados anteriores añadiendo pesas de 50g hasta alcanzar una masa de 300g.

4.2 Determinación de la constante efectiva de la asociación en paralelo.

1. Cuélguese la asociación de los dos muelles en paralelo y mídase la posición de la varilla superior (ℓ_{sup}). La segunda varilla roscada debe pasar por los extremos inferiores de los dos muelles. Cuélguese el soporte entre las dos tuercas, en una posición tal que los dos resortes se hallen en posición vertical y la varilla inferior quede horizontal.
2. Mídase la posición de la varilla inferior (ℓ_{inf}) cuando no hay masa colgada en el soporte.
3. En el soporte que cuelga del resorte, insértese una pesa de 50g (para ello haga uso de la moldura que tiene la varilla en su parte superior). Si la varilla inferior no queda horizontal, desplácese la posición del soporte hasta conseguirlo. Cuando esté en equilibrio estático mídase la posición del extremo inferior del muelle.
4. Anótese en la tabla la masa de la pesa y, para el resorte, la longitud resultante.
5. En el soporte, insértese otra pesa de 50g sin quitar la que ya está. Cuando esté en equilibrio estático horizontal (desplazando el punto de cuelgue del soporte si es necesario) mídase la posición del extremo inferior del muelle.

6. Anótese en la tabla la suma de las masas de las pesas y la nueva longitud del resorte.
7. Repítase los dos apartados anteriores añadiendo pesas de 50 g hasta alcanzar una masa de 300 g.

5. Análisis de los datos

5.1 Determinación de la constante de un solo muelle

1. Calcúlese la longitud natural del muelle ℓ_0 restando la posición superior de la inferior para el caso de que no haya masa colgada (pero sí soporte).
2. Para cada masa, calcúlese la longitud de equilibrio ℓ_{eq} restando la posición superior (común a todas las masas) de la inferior.
3. Represente gráficamente los puntos experimentales de ℓ_{eq} frente a m.
4. Calcúlese, a partir de los datos de m y ℓ_{eq}, la recta de mejor ajuste, $\ell_{\mathrm{eq}} = A + Bm$
5. Comparando la ecuación esta recta con la expresión (3), debe ser, igualando coeficiente a coeficiente $A = \ell_0$, $B = g/k$. Por ello, a partir de la pendiente de esta recta, calcúlese el valor de la constante de uno de los muelles, k, y su incertidumbre.

$$k = \frac{g}{B} \tag{9}$$

Tómese g con su valor estándar $g = 9.80665\ \mathrm{m/s^2}$ y supuesto sin incertidumbre.

6. Represéntese la recta de mejor ajuste en la misma gráfica anterior.

5.2 Determinación de la constante efectiva

1. Calcúlese la longitud natural del muelle ℓ_0 restando la posición superior de la inferior para el caso de que no haya masa colgada (pero sí soporte).
2. Para cada masa, calcúlese la longitud de equilibrio ℓ_{eq} restando la posición superior (común a todas las masas) de la inferior.
3. Represente gráficamente los puntos experimentales de ℓ_{eq} frente a m.
4. Calcúlese, a partir de los datos de m y ℓ_{eq}, la recta de mejor ajuste, $\ell_{\mathrm{eq}} = A + Bm$
5. A partir de la pendiente de la recta calcule la constante efectiva para la asociación de dos resortes

$$k_{\mathrm{ef}} = \frac{g}{B} \tag{10}$$

6. Cuestiones relativas a la realización de esta práctica

1. ¿Es la constante de la asociación igual al doble de la de un muelle individual? Justifique la respuesta a partir de los resultados obtenidos.
2. Para el caso de un solo resorte, compárese el valor de la longitud natural del muelle (ℓ_0) medido directamente con el muelle sin masas y con el calculado a partir de la recta de mejor ajuste. ¿Puede decirse que son coincidentes?
3. En el caso de la asociación de dos muelles, ¿cuál sería, con su incertidumbre, la longitud del muelle si se colgara una masa de 5 kg? ¿Es realista este resultado?