Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Prácticas de Física I

Práctica 10: Momentos de inercia

1 Objeto de la práctica

Determinación de los momentos de inercia de diversos sólidos a partir de la medida de su periodo de oscilación sobre un péndulo de torsión previamente caracterizado.

2 Fundamento teórico

2.1 Rotación de un sólido rígido

Un sólido rígido se define como un sistema de puntos materiales que tiene la propiedad de que la distancia entre cada par de puntos se conserva constante a lo largo del tiempo.

Cuando un sólido rígido experimenta un movimiento de rotación permanente alrededor de un eje de dirección $\vec{u}$, todos los puntos del sólido que pertenecen a dicho eje se hallan en reposo permanente, mientras que todos los puntos del sólido que no pertenecen a dicho eje describen trayectorias circulares completas o incompletas alrededor de él.

La rotación permanente de un sólido queda cinemáticamente caracterizada por el conocimiento de su eje de rotación y por el valor instantáneo de su vector velocidad angular

$$\vec{\omega} = \omega\vec{u} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{u}$$

siendo φ el ángulo de giro respecto a una dirección fijada.

Por otra parte, el teorema del momento cinético establece que la relación entre el momento cinético $\vec{L}$ del sólido y el momento resultante $\vec{M}$ de las fuerzas aplicadas a él (con $\vec{L}$ y $\vec{M}$ medidos respecto a un punto fijo en un sistema inercial) viene dada por:

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

En general, $\vec{L}$ no es paralelo al eje de rotación (ni, por tanto, a $\vec{\omega}$). Sin embargo, para un sólido con simetría de revolución en torno al eje de giro (un cilindro, un disco, una esfera...), sí se verifica que estos dos vectores son paralelos y se puede escribir:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

donde I es una cantidad a la que se denomina *momento de inercia* del sólido respecto a ese eje principal (o momento principal de inercia). Dos casos particulares muy importantes son

1. Cilindro macizo (incluyendo un disco)
$$I = \frac{1}{2}MR^2$$
2. Cilindro hueco (incluyendo un anillo)
$$I = MR^2$$
3. Esfera maciza
$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

A partir de las ecuaciones anteriores, y teniendo en cuenta que todos los vectores tienen la misma dirección (la del eje de rotación $\vec{u}$), se obtiene

$$\vec{M} = I\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\vec{u}$$

2.2 Péndulo de torsión

Se trata de una espiral arrollada en torno a un eje giratorio. El momento $\vec{M}$ de la fuerza recuperadora ejercida por un péndulo de torsión cuando se le imponen pequeñas desviaciones angulares φ respecto a su posición de equilibrio, se puede expresar como:

$$\vec{M} = -D\varphi\vec{u}$$

donde D es la constante recuperadora o constante elástica del péndulo de torsión. (Nota: el signo negativo en esta ecuación denota que el sentido de $\vec{M}$ es opuesto al de la rotación. Por tanto, tomando módulo, se puede escribir: $|\vec{M}| = D\varphi$).

Cuando la desviación del péndulo de torsión se debe a la rotación de un sólido alrededor de su eje, las ecuaciones anteriores conducen a:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{D}{I}\varphi$$

ecuación diferencial ordinaria de segundo orden cuya solución corresponde a un movimiento armónico simple de período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$$

Finalmente, despejando en esta ecuación, obtenemos una expresión que nos permite una estimación dinámica del momento de inercia (llamaremos I_d a esta estimación):

$$I_d = \frac{T^2 D}{4\pi^2}$$

3 Descripción del instrumental

Para esta práctica se usarán:

- Un péndulo de torsión, cuya constante elástica se desea determinar.
- Diversos sólidos simples, cuyo momento de inercia se quiere hallar.
- Un dinamómetro
- Una varilla rígida
- Una balanza electrónica
- Una regla.

4 Medidas en el laboratorio

4.1 Péndulo de torsión

1. Mida la distancia d entre el punto de medición de las fuerzas (punto de la barra en el que va a enganchar el dinamómetro) y el eje de giro del péndulo de torsión.

2. Tirando del dinamómetro, desvíe la barra, respecto a su posición de equilibrio, ángulos φ desde 0 hasta 3π radianes, de $\pi/2$ en $\pi/2$ radianes, y anote para cada ángulo la fuerza $|\vec{F}|$ que marca el dinamómetro. (Nota: Aunque el comportamiento del péndulo de torsión es simétrico, se recomienda por razones técnicas provocar las desviaciones del equilibrio en el sentido de apertura del resorte).

4.2 Momentos de inercia

4.2.1 Cálculo a partir de la fórmula

1. Con ayuda de la regla, mídase el diámetro de la pieza cilíndrica maciza.
2. Empleando la balanza electrónica, mídase la masa de esta pieza.
3. Repítase el proceso para el cilindro hueco (tómese el diámetro exterior).

4.2.2 Medida de las oscilaciones

1. Monte el cilindro macizo en el dinamómetro de torsión.
2. Mida 5 veces el tiempo necesario Δt para realizar 5 oscilaciones completas.
3. Repita el proceso para el cilindro hueco.

5 Análisis de los datos

5.1 Calibración del péndulo de torsión

1. Para cada fuerza, calcule el momento de la fuerza según la ley
$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{F}\right| d$$
2. Calcule la recta de mejor ajuste del momento frente al ángulo de giro, $|\vec{M}| = a + b\varphi$. Represéntese esta recta.
3. La constante elástica, D, es igual a la pendiente de la recta calculada en el apartado anteior.

5.2 Momentos de inercia teóricos

1. Para el sólido cilíndrico macizo, determínese el radio a partir de su diámetro.
2. A partir de la masa y el radio, halle el momento de inercia alrededor de su eje de simetría según la fórmula teórica.
3. Repita el cálculo para el cilindro hueco.

5.3 Momentos de inercia experimentales

1. Para el sólido cilíndrico macizo, a partir de las medidas de Δt, calcule el valor experimental del periodo como
$$T = \frac{1}{5}\langle \Delta t \rangle$$
con $\langle A \rangle$ la media aritmética de las distintas medidas de la misma magnitud.
2. A partir del periodo y de la constante recuperadora calculada al calibrar el dinamómetro, halle el momento de inercia según la fórmula indicada en la introducción teórica.
3. Repita el proceso para el sólido cilíndrico hueco.

6 Cuestiones relativas a la práctica

A la vista de estos resultados, ¿puede decirse que el momento de inercia hallado según la fórmula teórica y la experimental son coincidentes? ¿Por qué?

¿Y para el cilindro hueco?