Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Prácticas de Física I

Práctica 8: Método de Euler

1 Objeto de la práctica

En esta práctica se trata de analizar numéricamente de forma sencilla el problema del movimiento de una masa sujeta a un resorte elástico. Para ello se empleará el método de Euler.

2 Fundamento teórico

El análisis teórico de este problema se compone de dos partes. Por un lado, establecer las ecuaciones de movimiento que gobiernan el sistema. Por otro, implementar esas ecuaciones en un ordenador para calcular una solución aproximada.

2.1 Ecuaciones de movimiento

Consideremos el problema de una partícula unida a un resorte de constante k y longitud natural l_{eq}. Si el movimiento es rectilíneo podemos escribir la ecuación de movimiento combinando la 2ª ley de Newton con la ley de Hooke

$$ma = -k(l - l_{\mathrm{eq}}) \qquad l(t=0) = l_0 \qquad v(t=0) = v_0$$

Si definimos la elongación x como la posición relativa a la de equilibrio, $x = l - l_{\mathrm{eq}}$ queda

$$ma = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \qquad x(t=0) = x_0 \qquad v(t=0) = v_0$$

Esta ecuación diferencial puede descomponerse en dos ecuaciones de primer orden

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}x \qquad x(t=0) = x_0 \qquad v(t=0) = v_0$$

La solución general de este sistema es un movimiento armónico simple que en función de las condiciones iniciales queda

$$x = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\mathrm{sen}(\omega t) \qquad \Rightarrow \qquad v = -\omega x_0\,\mathrm{sen}(\omega t) + v_0\cos(\omega t)$$

siendo ω la *frecuencia angular* del movimiento

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

El movimiento armónico simple es periódico, siendo su periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La fuerza elástica es una fuerza conservativa, lo que quiere decir que en este movimiento la energía mecánica permanece constante

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \mathrm{cte.}$$

Estas ecuaciones de movimiento pueden resolverse también de forma numérica. La forma más simple de abordarlo es mediante el *método de Euler*.

2.2 El método de Euler

Una solución numérica de una ecuación diferencial consiste en sustituir el conocimiento de las funciones $(x(t), v(t))$ por una lista de valores (t_n, x_n, v_n) que nos da valores aproximados de la posición y la velocidad para los instantes t_n. Para un instante que no esté en la lista, se puede interpolar a partir de los que le rodean.

Para que un método numérico sea útil, debe ser preciso, esto es, los valores numéricos deben ser lo más próximos posible a la solución del problema. Al mismo tiempo, deben requerir el mínimo tiempo de cálculo posible. Para conseguir un balance entre estas dos condiciones opuestas existe toda una serie de técnicas numéricas.

Aquí planteamos como introducción la más sencilla de todas, conocida como método de Euler.

Comenzamos construyendo una lista de valores de tiempo, empleando un intervalo constante entre ellos Δt, que se fija de antemano, de forma que los sucesivos instantes ocurren en

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

Ahora aplicamos que una derivada no es más que un cociente entre dos incrementos infinitesimales. Podemos aproximar entonces la derivada por un cociente entre dos incrementos finitos

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

En términos de la lista de valores numéricos, este cociente nos da la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = v_n$$

y despejando

$$x_{n+1} = x_n + v_n \, \Delta t$$

Operando igualmente con la segunda ley de Newton obtenemos la relación

$$v_{n+1} = v_n + a_n \, \Delta T$$

donde

$$a_n = \frac{F_n}{m} = \frac{1}{m} F(x_n, v_n)$$

es la aceleración calculada a partir la posición y velocidad en el instante t_n.

Reuniendo las tres ecuaciones escribimos

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + \Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + v_n \, \Delta t \\ v_{n+1} &= v_n + a_n \, \Delta t \end{aligned}$$

que nos permiten ir construyendo la tabla de valores, empleando cada uno para hallar el siguiente.

Físicamente, este método significa que si conocemos la posición y la velocidad en un instante dado, podemos hallar la fuerza que actúa sobre la partícula y por tanto la aceleración que experimenta. Con la aceleración y la velocidad podemos calcular la velocidad y la posición en un instante posterior. Ahora se vuelve a calcular la fuerza y se repite el proceso.

El inconveniente del método de Euler es que es muy poco preciso. Las nuevas posición y velocidad son solo aproximadas, con un margen de error apreciable. Cuando ahora hallamos la aceleración su valor no es el correcto y las siguientes posición y velocidad están aun más alejados de sus valores reales, con lo que podemos terminar muy lejos de donde deberíamos estar.

La solución es hacer el intervalo de tiempo Δt lo más corto posible, pero esto implica aumentar el número de cálculos, por lo que el costo se puede hacer prohibitivo en tiempo de cálculo. Como resultado, el método de Euler no se usa en la práctica más que como introducción a otros métodos numéricos.

Aplicando las ecuaciones anteriores a nuestro problema concreto, quedan las relaciones

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + \Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + v_n \, \Delta t \\ v_{n+1} &= v_n - \frac{k}{m} x_n \, \Delta t \end{aligned}$$

En lo que sigue veremos como se implementa este método empleando el programa Excel. Para ello seguiremos el siguiente esquema:

1. Calcularemos la solución exacta para diferentes valores de la masa sujeta al resorte.
2. A continuación aplicaremos el método de Euler para las mismas situaciones.
3. Estableceremos la dependencia del periodo y de la amplitud de oscilación con la masa de la partícula.
4. Chequearemos el error acumulado en el método de Euler a partir de la comparación de la energía mecánica calculada con la exacta.

2.3 Procedimientos básicos en Excel

1. En Excel las celdas se identifican por una letra (la columna) y un número (la fila), por ejemplo, A2.
2. A las celdas se les puede dar nombre, pulsando sobre ella con el botón derecho del ratón y eligiendo "Definir nombre..."
3. Las fórmulas para hallar un valor se introducen comenzando la expresión con "=".
4. Cuando en una fórmula se emplea el valor de otra celda, se puede escribir la notación letra-número, el nombre que se le haya asignado, o simplemente pinchar en la celda correspondiente, así "=A3-B3" resta los valores de las celdas A3 y B3.
5. Cuando una celda con fórmula se copia en otra distinta, las referencias se trasladan automáticamente. Así, por ejemplo, si en la celda C3 pone "=C1", cuando se copia y pega en la E6 pasa a poner "=E4".
6. Para proteger una referencia al copiar y pegar, hay que usar el símbolo de dólar. Así si en C3 pone "=$C1" al copiar en E6 pasa a poner "=$C4". Si pone "=C$1" al copiar en E6 pasa a poner "=E$1". Y si pone "=$C$1" al copiar en E6 se mantiene el "=$C$1".
7. En Excel el producto se expresa con "*", la potencia con "^". Hay una gran cantidad de funciones disponibles (RAIZ para raíz cuadrada, COS para el coseno, SENO para el seno. . .).

3 Descripción del instrumental

El material preciso para la realización de esta práctica es:

- Un ordenador en el que se ha instalado el programa Excel

4 Realización de la práctica

Nota: Para agilizar la realización de la práctica, los dos procedimientos de cálculo que siguen se harán en paralelo.

En lo que sigue se supondrá que todas las magnitudes se miden en las unidades del Sistema Internacional.

4.1 Solución ideal

1. Iníciese la aplicación Excel con una hoja en blanco.
2. En una de las primeras fila escríbanse las etiquetas "k", "m", "t0", "dt", "x0", "v0", "w".
3. Debajo de ellas, anótense sus valores, que serán, en principio $k = 1$, $m = 5$, $t_0 = 0$, $dt = 0.01$, $x_0 = 0$, $v_0 = 25$.
4. Procedemos a darle nombres a estas celdas. Los nombres serán, respectivamente "k", "m", "t0", "dt", "x0", "v0"

5. Debajo de “w” escríbase la fórmula para la frecuencia angular `=RAIZ(k/m)`. Asígnese el nombre “w” a esta celda.

6. Dejando alguna fila blanca en medio, escríbase en otra fila, a modo de cabeceras, “t”, “x(exacto)”, “v(exacto)”, “E(exacto)”.

7. Justo debajo de la primera, cópiese el valor inicial del tiempo. Aprovechando los nombres, nos basta con escribir “=t0” o poner “=” y pinchar en la celda que queremos copiar.

8. Ahora rellenamos los valores de la posición y la velocidad para este instante. Se trata de, empleando la notación de Excel, escribir las fórmulas

$$x_n = x_0 \cos(\omega t_n) + \frac{v_0}{\omega}\mathrm{sen}(\omega t_n) \qquad \Rightarrow \qquad v_n = -\omega x_0 \,\mathrm{sen}(\omega t_n) + v_0 \cos(\omega t_n)$$

   Así, por ejemplo, si la celda con el valor de t es la B5 sería, para la posición

```
=x0*COS(w*B5)+(v0/w)*SENO(w*B5)
```

9. En la columna de la energía escríbase, en notación de Excel

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 + \frac{1}{2}kx_n^2$$

   es decir, si la posición y velocidad en ese instante están en las celdas C5 y D5 sería

```
=(1/2)*m*D5^2+(1/2)*k*C5^2
```

   Con esto hemos calculado la posición, la velocidad y la energía mecánica en $t = 0$. ¿Coinciden con los valores iniciales?

10. Escribimos ahora en la columna de tiempos, justo debajo del que ya teníamos, el valor anterior más el incremento dt (usando referencias, no a mano).

11. Ahora en las columnas “‘x(exacto)”, “v(exacto)”, “E(exacto)” copiamos y pegamos lo que está justo encima. Así se hallan la posición y la velocidad en $t = 0.01\,\mathrm{s}$.

12. Se copian y pegan estas tres celdas justo debajo de ellas. Así debe aparecer la posición y la velocidad en $t = 0.02\,\mathrm{s}$.

13. Se repite el proceso hasta que el valor de x se pase de negativo a positivo (puede hacerse en bloque muchas veces). Hacen falta del orden de 1500 filas para que esto ocurra.

14. Anote el valor del tiempo para el que ocurre este cambio de signo (tómese el que esté más cerca de $x = 0$). Este será el periodo de la oscilación.

15. Anote el valor de la energía en el instante en que se produce el cambio de signo.

16. Busque y anote el máximo valor de x. Este será el valor de la amplitud. Bastan tres cifras decimales.

17. Para identificar este método, puede ser interesante darle color a estas columnas, usando las opciones de formato de Excel. Empléese un color para la columna del tiempo, otro diferente para las dos columnas x(exacto) y v(exacto) y otro para E(exacto).

B24

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3		k	m	t0	dt	x0	v0	w	
4		1	5	0	0.01	0	25	0.4472136	
5									
6			t	x(exacto)	v(exacto)	E(exacto)	x(aprox)	v(aprox)	E(aprox)
7			0	0	25	1563	0	25	1562.5
8			0.01	0.249999167	24.99975000	1563	0.25	25	1562.53125
9			0.02	0.499993333	24.99900001	1563	0.5	24.9995	1562.5625
10			0.03	0.7499775	24.99775003	1563	0.749995	24.9985	1562.59375
11			0.04	0.999946668	24.99600011	1563	0.99998	24.99700001	1562.625

Figura 1: Aspecto de la hoja de Excel de la práctica

4.2 Solución numérica

Se trata ahora de comprobar que el método de Euler da un resultado aproximado para este problema

1. Añádanse tres nuevas columnas a la tabla, con cabeceras "x(aprox.)", "v(aprox)" y "E(aprox)"
2. Bajo las cabeceras, escríbanse los valores de x0 y v0 (mediante referencias).
3. En la fila inferior, en el formato de Excel deben escribirse las iteraciones

$$x_{n+1} = x_n + v_n\,\Delta t \qquad\qquad v_{n+1} = v_n - \frac{k}{m}x_n\,\Delta t$$

4. Repítanse las iteraciones hasta que x cambie de signo (use copiar y pegar).
5. En la columna E(aprox) escríbase, en el formato de Excel, la fórmula

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 + \frac{1}{2}kx_n^2$$

6. Anótense los valores del periodo (tiempo donde x pasa de negativo a positivo), de la energía en ese instante y de la amplitud (máximo valor de x).

4.3 Dependencia con la masa

1. Sin borrar lo escrito cámbiese la masa m por un valor de 2 kg. Anótense los valores exactos y aproximados del periodo, la energía y la amplitud.
2. Repítase el cálculo para m = 1 kg, 0.5 kg y 0.2 kg

5 Análisis de los datos

5.1 Dependencia del periodo

1. Represente los valores del periodo aproximado frente a la masa. ¿Es esta gráfica una recta?
2. Teóricamente el periodo es proporcional a la raíz cuadrada de la masa

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \Rightarrow \qquad T = a + b\sqrt{m} \qquad\qquad a \simeq 0 \qquad b = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$$

Calcúlese (y represéntese) la recta de mejor ajuste del periodo aproximado frente a la raíz cuadrada de la masa.

3. A partir de la recta anterior, halle la constante del resorte, con su error.

$$k = \frac{4\pi^2}{b^2}$$

¿Coincide con el valor de k fijado previamente?

5.2 Dependencia de la amplitud

1. Represente los valores de la amplitud exacta frente a la masa. Sobre esta misma gráfica represente los valores aproximados de la amplitud frente a la masa.

2. Teóricamente el periodo es proporcional a la raíz cuadrada de la masa

$$A = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \Rightarrow \qquad A = a + b\sqrt{m} \qquad\qquad a \simeq 0 \qquad b = \frac{v_0}{\sqrt{k}}$$

Calcúlese (y represéntese) la recta de mejor ajuste de la amplitud aproximada frente a la raíz cuadrada de la masa.

3. A partir de la recta anterior y con el valor de k calculado en el apartado anterior, halle la velocidad inicial.

$$v_0 = b\sqrt{k}$$

¿Coincide con el valor de v0 fijado previamente?

5.3 Errores del método de Euler

El método de Euler tiene errores acumulativos que se pueden poner de manifiesto en el cálculo de la energía mecánica. Esta cantidad, que debería ser constante, se va incrementando gradualmente en el método aproximado. Podemos estimar el error relativo cometido como

$$\epsilon = \frac{E_{\text{aprox}} - E_{\text{exacto}}}{E_{\text{exacto}}}$$

1. Constrúyase una tabla del periodo de oscilación frente a la energía exacta y la aproximada.

2. Calcule el error relativo en el valor de la energía para cada periodo.

3. El error relativo acumulado depende esencialmente del tamaño relativo de cada paso. Calcule la cantidad $\Delta t/T$ para cada periodo.

4. Represente el error relativo frente a $\Delta t/T$. Halle la recta de mejor ajuste entre estas dos cantidades.

6 Cuestiones relativas a la realización de esta práctica

1. ¿Qué aspecto tiene la gráfica $x(t)$ en este problema para la solución exacta? ¿Y para la aproximada?

2. Si se quisiera que para $m = 1\,\text{kg}$ el error en la energía fuera del 1% para un periodo, ¿qué intervalo de tiempo dt habría que tomar? ¿Cuántos pasos deberían realizarse en ese caso? ¿Y si se quiere que el error sea del 0.1%?