Práctica 7: Ondas estacionarias en una cuerda

1 Objeto de la práctica

En esta práctica vamos a generar una *onda estacionaria* en una cuerda. Variando la frecuencia aplicada, obtendremos diferentes modos de oscilación y mediremos la *velocidad de propagación* de la onda para diferentes tensiones aplicadas. A partir de estas medidas, obtendremos la *densidad lineal de masa* de la cuerda y compararemos este valor con el obtenido pesando un trozo de cuerda de longitud dada.

2 Fundamento teórico

2.1 Ondas viajeras en una cuerda

Dada una perturbación que se propaga por una cuerda, su expresión matemática ha de ser de la forma

$$y(x,t) = f(x \mp vt) \tag{1}$$

El signo menos corresponde a una onda que viaja en el sentido positivo del eje X y el signo mas a una onda que viaje en el sentido negativo. Si la onda que estamos estudiando es sinusoidal la expresión es

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi) \tag{2}$$

Aquí, k es el número de onda, ω es la frecuencia angular y ϕ es la fase. La longitud de onda, λ, el período T y la velocidad de propagación se relacionan con las siguientes expresiones

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \tag{3}$$

La velocidad de propagación depende de la tensión, F_T, a la que está sometida la cuerda y de su densidad lineal de masa, μ según la expresión

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \tag{4}$$

2.2 Ondas estacionarias en una cuerda infinita

Consideremos ahora dos ondas viajeras con la misma amplitud, frecuencia y fase, pero que se desplazan sobre una cuerda infinita con sentidos de propagación contrarios.

$$y_1 = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \qquad\qquad y_2 = A\,\mathrm{sen}(kx + \omega t) \tag{5}$$

Aplicando el principio de superposición, la perturbación total en un punto cualquiera de la cuerda es la suma de las dos ondas

$$y = y_1 + y_2 = A\left(\mathrm{sen}(kx - \omega t) + \mathrm{sen}(kx + \omega t)\right) \tag{6}$$

Utilizando la relación

$$\mathrm{sen}(a+b) + \mathrm{sen}(a-b) = 2\,\mathrm{sen}(a)\cos(b) \tag{7}$$

obtenemos

$$y = 2A\,\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t) \tag{8}$$

Esto no es una onda viajera, pues no aparece la combinación $kx - \omega t$. Es una **onda estacionaria**. Al ser el producto de una función espacial por una función temporal, cuando la función espacial es cero, se anula la función completa. Esto quiere decir que hay puntos que no oscilan en absoluto. La posición de estos puntos, llamados **nodos** viene dada por la condición

$$\operatorname{sen}(kx_n) = 0 \Rightarrow kx_n = n\pi \Rightarrow x_n = \frac{n\pi}{k} = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{9}$$

Es decir, los nodos están espaciados una distancia $\boxed{\Delta x = \lambda/2}$, siendo λ la longitud de onda de cada una de las ondas que forman la superposición.

La posición de los puntos en los que la oscilación es máxima se obtiene imponiendo que la función espacial alcance su valor máximo, esto es

$$\operatorname{sen}(kx_n) = 1 \Rightarrow kx_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{10}$$

Estos puntos se denominan **antinodos**. La separación entre dos de estos antinodos es también $\boxed{\Delta x = \lambda/2}$. Por tanto, la distancia entre un nodo y el antinodo siguiente es $\Delta x = \lambda/4$.

2.3 Ondas estacionarias en una cuerda finita

Supongamos ahora que tenemos un cuerda de longitud L, sometida a una cierta tensión F_T, y que está sujeta en sus dos extremos, de modo que estos no pueden vibrar. Si hacemos vibrar la cuerda por ejemplo empujándola en su centro (como la cuerda de una guitarra), aparecen ondas que viajan en los dos sentidos y, después de reflejarse en los extremos de la cuerda, la recorren de un lado a otro. Con ello obtenemos un patrón de onda estacionaria en la cuerda. Ocurre que estas ondas estacionarias deben cumplir que los dos extremos de la cuerda sean nodos. Esto impone una restricción a la forma en que la cuerda puede oscilar. Si tomamos $x = 0$ como el extremo izquierdo y $x = L$ como el derecho, la onda debe cumplir que

$$\operatorname{sen}(kx)|_{x=0} = 0 \qquad\qquad \operatorname{sen}(kx)|_{x=L} = 0 \tag{11}$$

La primera condición es trivial, pero la segunda obliga a que los números de onda posibles, y por tanto las longitudes de onda posibles, tengan valores cuantizados

$$\operatorname{sen}(kx)|_{x=L} = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Descartamos el caso $n = 0$ pues corresponde a que no haya vibraciones en la cuerda. Cada uno de los valores de n corresponde a un **modo normal** de vibración. Y a cada modo normal le corresponde una frecuencia, denominada un **armónico**

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \qquad f_n = \frac{n}{2L}v = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

3 Descripción del instrumental

El material preciso para la realización de esta práctica es:

- Una cinta métrica.
- Una cuerda de nylon dispuesta horizontalmente.
- Un vibrador al que está atado la cuerda.
- Un generador de vibraciones sinusoidales de frecuencia ajustable.
- Una caja con diferentes masas.

4 Realización de la práctica

4.1 Medidas en el laboratorio

1. Colóquese la cuerda sobre la polea de modo que quede horizontal.
2. Con la cinta métrica mídase y anótese la longitud L de la cuerda entre el centro de la polea y el punto donde está atada al vibrador.
3. Colóquense dos pesas de 100 g en el soporte para pesas que cuelga del extremo de la cuerda. Anótese la masa total que cuelga de la cuerda, **sin olvidar la masa del soporte para pesas**.
4. Teniendo cuidado de que el dial de amplitud esté a cero, fíjese una frecuencia de 18 Hz en el generador de vibraciones.
5. Auméntese la amplitud de modo que el dial esté aproximadamente a un cuarto de su posición máxima.
6. Ajústese la frecuencia de modo que la cuerda oscile sin nodos (modo $n = 1$). Para controlar la frecuencia hay un dial de ajuste grueso y otro de ajuste fino. Utilícese el que más convenga en cada caso.
7. Auméntese la frecuencia de modo que la cuerda oscile con un nodo en el medio (modo $n = 2$). Es importante que el punto donde la cuerda está atada al vibrador se mueva lo menos posible. Para ello es conveniente que la amplitud no sea muy grande.
8. Con el dial de ajuste fino, fíjese una frecuencia de modo que la oscilación sea estable y de amplitud máxima. Anótese el valor de la frecuencia para el que ocurre esto.
9. Variando la frecuencia, repítase el proceso con oscilaciones de 2 y 3 nodos intermedios (modos $n = 3, 4$). Al ir aumentado el número de nodos es probable que se tenga que aumentar la amplitud de las oscilaciones.
10. Hágase la misma serie de medidas colocando masas totales de 150, 100 y 50 g en el soporte.

4.2 Análisis de los datos

1. Para cada serie de medidas con una masa dada colgando de la cuerda, calcúlese la velocidad de propagación de la señal a lo largo de ella. Para ello se debe realizar un ajuste de mínimos cuadrados de la recta

   $$f = a + bn$$

   y utilizar la expresión (13), de modo que

   $$a \simeq 0 \qquad b = \frac{v}{2L} \tag{14}$$

   Represéntense las cuatro series de puntos con sus rectas respectivas en la misma gráfica.

2. Para cada masa fijada, la tensión de la cuerda es $F_T = mg$, donde m es la masa total (teniendo en cuenta el soporte) y $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ es la aceleración de la gravedad (dato sin error). Como se ha medido la velocidad de propagación para cuatro tensiones diferentes, se puede calcular la densidad lineal de masa con el ajuste

   $$F_T = a + bv^2$$

   Comparando con la expresión (4) se ve que $b = \mu$. Represéntese gráficamente los puntos experimentales y la recta de mejor ajuste.

3. Se ha medido un trozo de cuerda de longitud $L = 2759.0 \pm 0.9\,\mathrm{mm}$ y se ha encontrado que su masa es $m_L = 3.333 \pm 0.001\,\mathrm{g}$. Calcúlese con su error la densidad lineal de masa y compárese este valor con el obtenido anteriormente.

4.3 Cuestiones relativas a la realización de la práctica

1. ¿Por qué hay que intentar que la amplitud de las oscilaciones del vibrador sea lo más pequeña posible a la hora de realizar las medidas?

2. Supóngase que se sustituye la cuerda de nylon por otra con la misma longitud pero con una densidad de masa $\mu = 2.00 \pm 0.01\,\mathrm{g/m}$. Si se quiere excitar el modo de oscilación correspondiente a $n = 2$, con una pesa de 100 g, ¿qué frecuencia se tendría que fijar? Calcúlese el valor con su error.