Práctica 4. Ley de Hooke

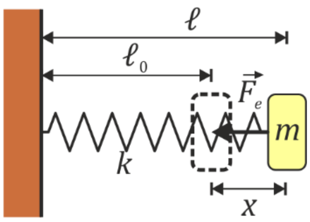
1. Objeto de la práctica

En esta práctica se determinará la constante elástica de un muelle utilizándose dos procedimientos. El primero consiste en medir la elongación del muelle en equilibrio estático para distintas masas que cuelgan del mismo en presencia del campo gravitatorio terrestre. El segundo procedimiento se basa en la medición del periodo de las oscilaciones verticales de una masa fija al extremo del muelle.

2. Fundamento teórico

2.1 Ley de Hooke

Considérese la situación de la figura.



Un muelle ideal de longitud natural ℓ_0 se encuentra en el eje OX, manteniendo uno de sus extremos fijo al origen de coordenadas, y el otro en contacto con un objeto puntual P de masa m. La fuerza que actúa sobre P viene dada por la Ley de Hooke:

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{\imath} \tag{1}$$

donde la constante k recibe el nombre de constante elástica o recuperadora y ℓ es la longitud del muelle en un instante dado. A la diferencia $x = \ell - \ell_0$ se la denomina elongación del muelle.

2.2 Movimiento armónico simple

Un punto realiza un movimiento armónico simple (MAS) en el eje OX, alrededor de una posición de equilibrio z_{eq}, cuando la relación entre la posición y el tiempo se puede expresar de la forma:

$$z(t) = z_{\text{eq}} + A\cos(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

donde A, ω y φ son constantes (A y ω se definen positivas). La constante A recibe el nombre de amplitud del MAS., estando z comprendida entre $(z_{\text{eq}} - A)$ y $(z_{\text{eq}} + A)$. La constante ω se denomina frecuencia angular. φ es la constante de fase y nos da el estado de oscilación en el instante inicial $t = 0$.

Una partícula que sigue esta ecuación describe un movimiento periódico, cuyo periodo T lo da el que la fase varíe en 2π. De aquí $T = 2\pi/\omega$.

Derivando dos veces respecto al tiempo y utilizando (2) se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\left(z - z_{\text{eq}}\right) \tag{3}$$

o, en términos de la elongación $x = z - z_{\text{eq}}$

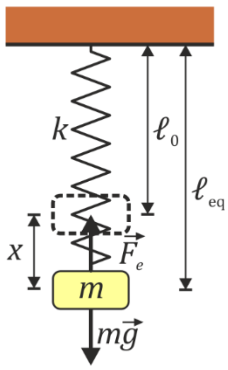
$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x \tag{4}$$

Esta ecuación se denomina ecuación diferencial del MAS, y representa la relación que liga a la posición y la aceleración en el movimiento armónico simple: la aceleración es proporcional y opuesta a la elongación. Sus soluciones, es decir, aquellas funciones $z(t)$ que la verifican, son todos los MAS de frecuencia angular ω alrededor de z_{eq}, los cuales vienen dados por (2).

2.3 Dinámica del movimiento armónico simple

2.3.1. Equilibrio

Considérese el sistema de la figura. Un muelle ideal, de constante elástica k y longitud natural ℓ_0, se encuentra suspendido verticalmente de un punto fijo, en presencia del campo gravitatorio terrestre, estando su otro extremo unido a una partícula de masa m. Se toma como coordenada la longitud del muelle, ℓ, medida desde su extremo superior, de manera que el eje X es vertical y hacia abajo.



Las fuerzas que actúan sobre la partícula son la fuerza elástica, $\vec{F}_e = -k(\ell - \ell_0)\vec{\imath}$, y el peso, $m\vec{g} = mg\vec{\imath}$. Se define la posición de equilibrio como aquella en la que, si se deja la masa en reposo, permanece en reposo. La condición para que ello ocurra es que la fuerza neta sobre la masa sea nula

$$-k\left(\ell_{\mathrm{eq}} - \ell_0\right) + mg = 0 \tag{5}$$

De aquí resulta una longitud de equilibrio superior a la natural, debido a la acción del peso.

$$\ell_{\mathrm{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k} \tag{6}$$

2.3.2. Movimiento oscilatorio

Se analiza a continuación el movimiento de la partícula sometida a la acción conjunta del muelle y el peso. El punto de partida es la segunda ley de Newton,

$$ma = mg - k(\ell - \ell_0) \tag{7}$$

que lleva a la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}^2 \ell}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}\left(\ell - \ell_{\mathrm{eq}}\right) \tag{8}$$

Comparando (8) con (3) se deduce que el movimiento de la partícula es armónico simple, oscilando alrededor de ℓ_{eq} (¡no ℓ_0!) con una frecuencia angular y periodo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{9}$$

Nótese que la frecuencia angular, y por tanto el periodo, sólo dependen de la constante elástica del muelle y de la masa, no del valor de la gravedad. Tampoco dependen de las condiciones iniciales, es decir, la posición y velocidad iniciales.

3. Descripción del instrumental

El material preciso para la realización de esta práctica es:

- Un muelle.
- Un conjunto de pesas (una de 100g, dos de 200g y una de 500g)
- Una regla.
- Un cronómetro.
- Una balanza digital capaz de pesar 600g al menos.
- Un soporte vertical para el muelle

4. Realización de la práctica

4.1 Determinación de la constante del muelle. Método estático

1. Cuélguese el muelle y mídase la posición del extremo superior (tomada como la altura del centro del aro superior).
2. Mídase la posición del extremo inferior del muelle cuando no hay masa colgada (tomada como la altura del centro del aro inferior)
3. Para la pesa de valor nominal 100g, mídase su peso real en la balanza digital.
4. Del extremo libre del muelle cuélguese la pesa de 100g. Cuando esté en equilibrio estático mídase la posición del extremo inferior del muelle.
5. Repítanse los dos apartados anteriores para las masas: 200, 300, 400 y 500g. Para conseguir alguno de estos valores puede ser necesario colgar unas pesas de otras. En ese caso, hay que colocar en la balanza simultáneamente las dos pesas que se vayan a colgar y anotar el valor conjunto de sus masas. Téngase cuidado de no confundir las dos pesas de valor nominal 200g.

4.2 Determinación de la constante del muelle. Método dinámico

1. Pésese en la balanza una pesa de 200g.
2. Cuélguese del extremo libre del muelle esta pesa de 200g y espérese hasta que quede en equilibrio.
3. Tírese de la pesa verticalmente hacia abajo una distancia moderada (2 o 3 cm)
4. Libérese la pesa, iniciando la cuenta con el cronómetro.
5. Mídase el tiempo que emplea la pesa en realizar seis oscilaciones completas (cada oscilación acaba cuando la pesa llega al punto más bajo). Anótese el tiempo t_1 para las seis oscilaciones completas. Si el muelle no oscila verticalmente, sino que "pendulea" lateralmente, descártese la medida y vuélvase a realizar.
6. Repítase el proceso dos veces más, anotando los tiempos t_2 y t_3.
7. Para cada una de las siguientes masas: 300, 400, 500 y 600g repítase los apartados del 1 al 6. Para conseguir alguno de estos valores puede ser necesario colgar unas pesas de otras. En ese caso, hay que colocar en la balanza simultáneamente las dos pesas que se vayan a colgar y anotar el valor conjunto de sus masas. Téngase cuidado de no confundir las dos pesas de valor nominal 200g.

5. Análisis de los datos

5.1 Determinación de la constante del muelle. Método estático

1. Calcule la longitud natural del muelle ℓ_0 restando la posición superior de la inferior para el caso de que no haya masa colgada,

2. Para cada masa, calcúlese la longitud de equilibrio ℓ_{eq} restando la posición superior (común a todas las masas) de la inferior
3. Represéntese gráficamente los puntos experimentales de ℓ_{eq} frente a m.
4. Calcúlese, a partir de los datos de m y ℓ_{eq} la recta de mejor ajuste, $\ell_{\mathrm{eq}} = A + Bm$
5. Comparando la ecuación esta recta con la expresión (6), debe ser, igualando coeficiente a coeficiente

$$\ell_0 = A \qquad \frac{g}{k} = B \tag{10}$$

6. A partir de la pendiente de esta recta, calcúlese el valor de la constante del muelle, k, y su incertidumbre.

$$k = \frac{g}{B} \tag{11}$$

7. Represéntese la recta de mejor ajuste en la misma gráfica anterior.

Tómese g con su valor estándar $g = 9.80665\ \mathrm{m/s^2}$ y supuesto sin incertidumbre.

5.2 Determinación de la constante del muelle. Método dinámico

1. Para cada masa calcúlese el valor medio, con su incertidumbre, del tiempo empleado en realizar 6 oscilaciones.
2. Calcúlese para cada masa el valor medio del periodo $\langle T\rangle$ y su cuadrado, $\langle T\rangle^2$; además de las incertidumbres de ambas cantidades.
3. Represéntese gráficamente $\langle T\rangle^2$ frente a m.
4. Calcúlese la recta de mejor ajuste a las medidas experimentales $\langle T\rangle^2 = A + Bm$
5. Si elevamos al cuadrado la expresión teórica del periodo queda $\langle T\rangle^2 = 4\pi^2 m/k$. Comparando esto con la recta de mejor ajuste debe ser

$$0 \simeq A \qquad \frac{4\pi^2}{k} = B \tag{12}$$

A partir de la pendiente de esta recta, calcúlese el valor de la constante del muelle, k y su incertidumbre.

$$k = \frac{4\pi^2}{B} \tag{13}$$

6. Represéntese la recta de mínimos cuadrados en la misma gráfica anterior.

6. Cuestiones relativas a la realización de esta práctica

1. Compárese el valor de la longitud natural del muelle (ℓ_0) medido directamente con el muelle sin masas y con el calculado a partir de la recta de mejor ajuste. ¿Puede decirse que son coincidentes?
2. Compárese los valores de la constante del muelle obtenida por el método estático y por el método dinámico. ¿Puede decirse que son coincidentes?
3. ¿Cuál sería, con su incertidumbre, la longitud del muelle si se colgara una masa de 5 kg? ¿Es realista este resultado?