# Práctica 4: LEY DE HOOKE

## 1 Objeto de la práctica

En esta práctica se determinará la constante elástica de un muelle utilizándose dos procedimientos. El primero consiste en medir la elongación del muelle en equilibrio estático para distintas masas que cuelgan del mismo en presencia del campo gravitatorio terrestre. El segundo procedimiento se basa en la medición del periodo de las oscilaciones verticales de una masa fija al extremo del muelle.

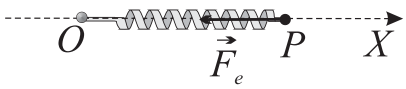
## 2 Fundamento teórico

### 2.1 Ley de Hooke

Considérese la situación de la figura. Un muelle ideal de longitud natural $l_0$ se encuentra en el eje $OX$, manteniendo uno de sus extremos fijo al origen de coordenadas, y el otro en contacto con un objeto puntual $P$ de masa $m$. La fuerza que actúa sobre $P$ viene dada por la *Ley de Hooke*:

$$\vec{F}_e = -k(l - l_0)\,\vec{\imath} \tag{1}$$

donde la constante $k$ recibe el nombre de constante elástica o recuperadora y $l$ es la longitud del muelle en un instante dado. A la diferencia $l - l_0$ se la denomina *elongación* del muelle.




### 2.2 Movimiento armónico simple

Un punto realiza un movimiento armónico simple (m.a.s.) en el eje $OX$, alrededor de una posición de equilibrio $x_{\mathrm{eq}}$, cuando la relación entre la posición y el tiempo se puede expresar de la forma:

$$x(t) = x_{\mathrm{eq}} + A\cos(\omega t + \phi) \tag{2}$$

donde $A$, $\omega$ y $\phi$ son constantes ($A$ y $\omega$ se definen positivas). La constante $A$ recibe el nombre de *amplitud* del m.a.s., estando $x$ comprendida entre $(x_{\mathrm{eq}} - A)$ y $(x_{\mathrm{eq}} + A)$. La constante $\omega$ se denomina *frecuencia angular*. $\phi$ es la *constante de fase* y nos da el estado de oscilación en el instante inicial $t = 0$.

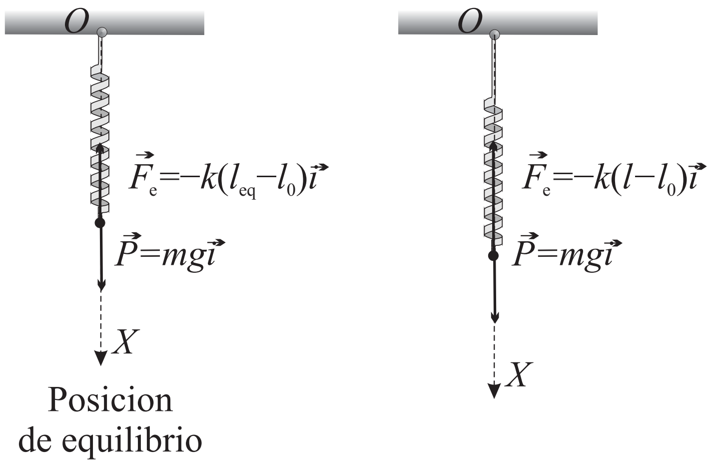
Una partícula que sigue esta ecuación describe un movimiento periódico, cuyo periodo $T$ lo da el que la fase varíe en $2\pi$. De aquí $T = 2\pi/\omega$
Derivando dos veces respecto al tiempo y utilizando (2) se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2(x - x_{\mathrm{eq}}) \tag{3}$$

Esta ecuación se denomina *ecuación diferencial del m.a.s.*, y representa la relación que liga a la posición y la aceleración en el movimiento armónico simple: la aceleración es proporcional y opuesta a la diferencia $x - x_{\mathrm{eq}}$. Sus soluciones, es decir, aquellas funciones $x(t)$ que la verifican, son todos los m.a.s. de frecuencia angular $\omega$ alrededor de $x_{\mathrm{eq}}$, los cuales vienen dados por (2).

## 2.3 Dinámica del movimiento armónico simple

Considérese el sistema de la figura siguiente:




Un muelle ideal, de constante elástica $k$ y longitud natural $l_0$, se encuentra suspendido verticalmente de un punto fijo, en presencia del campo gravitatorio terrestre, estando su otro extremo unido a una partícula de masa $m$. Se toma el eje $OX$ con origen en el punto de suspensión del muelle, y cuyo sentido positivo coincide con el de la gravedad. De esta forma, la posición de la masa coincide con la longitud del muelle. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son la fuerza elástica, $\vec{F}_e = -k(l - l_0)\,\vec{\imath}$, y el peso, $\vec{P} = mg\vec{\imath}$.

Se define la **posición de equilibrio** como aquella en la que los módulos del peso y la fuerza elástica son iguales. Puede verse fácilmente que esta posición viene dada por la expresión:

$$l_{eq} = l_0 + \frac{g}{k}m \tag{4}$$

Se analiza a continuación el movimiento de la partícula sometida a la acción conjunta del muelle y el peso. El punto de partida es la segunda ley de Newton,

$$\vec{P} + \vec{F}_e = m\vec{a}$$

que da lugar a la ecuación siguiente:

$$\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}(l - l_{eq}). \tag{5}$$

Comparándose (5) con (3) se deduce que el movimiento de la partícula es armónico simple, oscilando alrededor de $l_{eq}$ (ecuación 4) con una frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$, es decir, con un periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{6}$$

Nótese que la frecuencia angular, y por tanto el periodo, sólo dependen de la constante elástica del muelle y de la masa, no del valor del campo gravitatorio terrestre. Tampoco dependen de las condiciones iniciales, es decir, la posición y velocidad iniciales.

# 3 Descripción del instrumental

El material preciso para la realización de esta práctica es:

- Un muelle.
- Un conjunto de pesas.
- Una regla.
- Un cronómetro.

# 4 Realización de la práctica

## 4.1 Medidas en el laboratorio

**Nota:** todas las masas tienen una incertidumbre absoluta de 5 g

### 4.1.1 Determinación de la constante del muelle: método estático

1. Cuélguese el muelle y mídase su longitud natural ($l_0$).
2. Del extremo libre del muelle cuélguese la masa de 100 g, cuando esté en equilibrio estático mídase la longitud ($l_{\rm eq}$) que tiene el muelle.
3. Repítase el apartado anterior para las masas: 200, 300, 400 y 500 g.

### 4.1.2 Determinación de la constante del muelle: método dinámico

1. Cuélguese del extremo libre del muelle una masa de 200 g.
2. Tírese de la pesa hacia abajo una distancia moderada (2 o 3 cm)
3. Libérese la pesa, iniciando la cuenta con el cronómetro.
4. Mídase el tiempo que emplea la pesa en realizar seis oscilaciones completas (cada oscilación acaba cuando la pesa llega al punto más bajo).
5. Repítase el proceso dos veces más.
6. Para cada una de las siguientes masas: 300, 400, 500 y 600 g repítase los apartados del **2** al **5**.

## 4.2 Análisis de los datos

### 4.2.1 Determinación de la constante del muelle: método estático

1. Represéntese gráficamente los puntos experimentales de $l_{\rm eq}$ frente a $m$.
2. Calcúlese la recta que mejor se ajusta a las medidas experimentales

$$l_{\rm eq} = A + B\,m$$

   comparándose con la expresión (4), debería de ser

$$A \sim l_0\,; \quad B = \frac{g}{k}$$

3. Represéntese la recta de mínimos cuadrados en la misma gráfica anterior.
4. A partir de la pendiente de esta recta, calcúlese el valor de la constante del muelle $k$ y su error. Considérese que el valor de la gravedad es $g = 9.81$ m/$s^2$, y sin error.
5. Compárese el valor de la ordenada en el origen con la longitud natural del muelle ($l_0$).

### 4.2.2 Determinación de la constante del muelle: método dinámico

1. Para cada masa calcúlese el valor medio, con su incertidumbre, del tiempo empleado en realizar 6 oscilaciones.

2. Calcúlese para cada masa el valor medio del periodo $< T >$ y elévelo al cuadrado $< T >^2$; además de las incertidumbres de ambos.

3. Represéntese gráficamente $< T >^2$ frente a $m$.

4. Calcúlese la recta que mejor se ajusta a las medidas experimentales

$$< T >^2 = A + B\,m$$

elevando al cuadrado la expresión del periodo $T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$ y comparándose con la recta de ajuste, debería de ser

$$A \sim 0; \quad B = \frac{4\pi^2}{k}$$

5. Represéntese la recta de mínimos cuadrados en la misma gráfica anterior.

6. A partir de la pendiente de esta recta, calcúlese el valor de la constante del muelle $k$ y su incertidumbre.

## 4.3 Cuestiones relativas a la realización de la práctica

1. Compárese los valores de la constante del muelle obtenida por ambos métodos.

2. Supóngase que se sustituye el muelle por otro con una constante $k$ dieciséis veces mayor. ¿Cuánto vale el periodo $T$ de este muelle?.